Corrigé du devoir maison 8 -30-11-11-
Terminale ES 2, 2011-2012, Y. Angeli

Exercice 1. $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x^3}{x^2-2x+1}$

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$. (en utilisant le théorème du plus haut degré).

2. $\lim\limits_{x\to1} x^3 = 1$ et $\lim\limits_{x\to1} x^2-2x+1 = 0$: le dénominateur tend vers 0, on étudie son signe.
$x^2-2x+1 = (x-1)^2 > 0$ si $x \neq 1$, par conséquent $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{1}{x^2-2x+1} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to1} f(x) = +\infty$.
(Ainsi la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}$)

3. Pour $x \neq 1$, $x+2+\frac{3x-2}{x^2-2x+1} = \frac{(x+2)(x^2-2x+1)+3x-2}{x^2-2x+1} = \frac{x^3-2x^2+x+2x^2-4x+2+3x-2}{x^2-2x+1} = f(x)$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x+2) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x-2}{x^2-2x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x} = 0$ par le théorèüe du plus haut degré. On obtient de même une limite nulle en $-\infty$.
Ainsi la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $y = x+2$ comme asymptote en $+\infty$ et $-\infty$.

5. On étudie le signe de $f(x)-(x+2) = \frac{3x-2}{x^2-2x+1}$ pour $x \neq 1$. Or $x^2-2x+1 = (x-1)^2 > 0$ pour $x \neq 1$, donc la différence est du signe de $3x-2$ qui est une fonction affine de coefficient directeur $3 > 0$ qui s'annule en $x = \frac{2}{3}$:

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$f(x)-(x+2)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	

.

6. Pour tout $x \neq -1$, $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = x^3$ donc $u'(x) = 3x^2$ et $v(x) = x^2-2x+1$ donc $v'(x) = 2x-2$. Donc pour $x \neq 1$:
$f'(x) = \frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v(x)^2} = \frac{3x^2(x^2-2x+1)-x^3(2x-2)}{(x^2-2x+1)^2} = \frac{x^4-4x^3+3x^2}{(x^2-2x+1)^2} = \frac{x^2(x^2-4x+3)}{(x^2-2x+1)^2}$

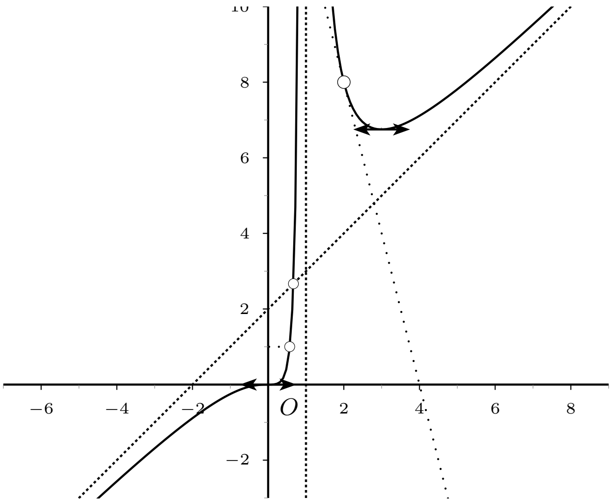
7. Le trinôme x^2-4x+3 est de discriminant $\Delta = 4 > 0$ donc admet deux racines $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$. Il est du signe (positif) de 1 entre les racines 1 et 3 et de signe contraire à l'extérieur.
$x^2 > 0$ si $x \neq 0$ et $(x^2-2x+1)^2 > 0$ si $x \neq 1$ donc :

x	$-\infty$		0		1		3		
x^2		$+$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-4x+3		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$(x^2-2x+1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$		$+\infty$	$\|\|$	$+\infty$ $\searrow$	6.75	$\nearrow$	$+\infty$

8. La tangente T a pour équation $y = f'(2)(x-2)+f(2)$. Or $f(2) = \frac{2^3}{2^2-2\times2+1} = 8$ et $f'(2) = \frac{2^2(2^2-4\times2+3)}{(2^2-2\times2+1)^2} = -4$ donc $T : y = -4(x-2)+8$ d'où $\boxed{T :\ y = -4x+16}$.

9. La fonction f est strictement croissante sur $]0; \frac{2}{3}[$ d'après la question 7, elle continue sur $[0; \frac{2}{3}]$ car c'est une fraction rationnelle et $f(0) = 0 < 1 < \frac{8}{3} = f(\frac{2}{3})$ donc l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0; \frac{2}{3}]$. Comme f est strictement croissante sur $[\frac{2}{3}; 1[$, si $x > \frac{2}{3}$, $f(x) > \frac{8}{3} > 1$ donc $f(x) = 1$ admet une solution unique sur l'intervalle $[0; 1]$.
À la calculatrice, $0.5 < \alpha < 0.6$ car $f(0.5) = 0.5 < 1 < 1.35 = f(0.6)$

10.



EXERCICE 2.

2(a) On saisit la série des vitesses x dans L_1, la série des distances y dans L_2 et on calcule la série des z : $L_3 = \sqrt{L_2}$

i	1	2	3	4	5	6	7
x	33	33	49	49	65	79	93
z	2.55	2.30	3.80	3.35	4.5	6.4	7.1

2(b) On obtient à la calculatrice $\left(\text{REGLIN(ax+b) } L_1, L_3\right)$: $z = 0.08x - 0.30$.

2(c) On a $z = \sqrt{y} = 0.08x - 0.30$ donc $y = (0.08x - 0.30)^2$.
On construit la courbe en calculant les ordonnées y à partir de la série des x.

3. À 120 km/h, la distance d'arrêt est de $y = (0.08 \times 120 - 0.3)^2 \approx 86.49$ donc il faut prévoir environ 86,5 mètres de distances pour s'arrêter.

1.