Devoir maison 8 : pour le -09-11-11-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

Désintégration des noyaux radioactifs :
Les noyaux des atomes d'un corps radioactif se désintègrent selon la loi suivante :

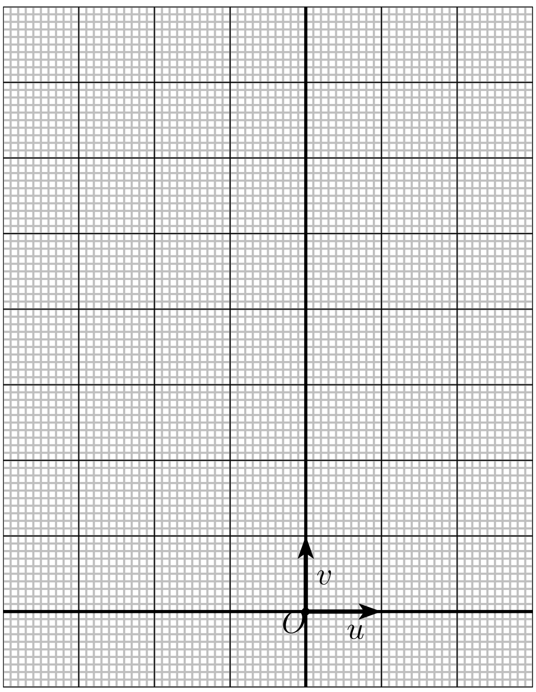
Si $N(t)$ est le nombre de noyaux présents à l'instant t, pendant la durée Δt, la variation $\Delta N(t) = N(t + \Delta t) - N(t)$ du nombre de noyaux est proportionnelle à Δt et $N(t)$.
Les physiciens écrivent :

$$\Delta N(t) = -kN(t)\Delta t$$

En supposant que la fonction $N(t)$ est dérivable, expliquer pourquoi : $N'(t) = -k \cdot N(t)$.
Il s'agit maintenant de déterminer $N(t)$.
Problème : On cherche une fonction f proportionnelle à sa dérivée.
Étudions l'équation différentielle : $f' = k \cdot f$ ou $y' = k \cdot y$
L'équation différentielle $f' = k \cdot f$ se retrouve dans de nombreux problèmes : circuit RL en électricité, datation au carbone 14, évolution d'une population dont la croissance est proportionnelle au nombre d'habitants, etc. Le problème est de trouver une fonction la satisfaisant.
Par exemple, certains phénomènes en mécanique conduisent à étudier l'équation différentielle $f'' = -f$. Nous connaissons au moins deux fonctions la satisfaisant : cosinus et sinus. Dans le cas de $f' = f$, aucune fonction connue ne convient.

Nous allons représenter la courbe d'une fonction solution de l'équation différentielle $f' = f$ avec la condition $f'(0) = 1$. On admet l'existence d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f = f'$ et $f(0) = 1$.

1. Montrer que pour tout x réel et tout h assez petit, $f(x + h) \approx (1 + h)f(x)$
2. En déduire (par réccurrence) $f(nh) \approx (1 + h)^n$.
3. De ce qui précède, déduire $f(x) \approx \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ pour $x = nh$. (donc n assez grand)
4. Utiliser cette approximation avec $n = 10^4$ pour obtenir une valeur approchée de $f(1)$.
5. En utilisant le même principe, remplir le tableau suivant.
6. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point $(0; 1)$ et la représenter, puis représenter la courbe soigneusement.



x	f(x)
-4	
-3	
-2,5	
-2	
-1,5	
-1	
-0,5	
0	
0,5	
1	
1.5	
2	