

TP 4 : DICHOTOMIE -30-11-11-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

EXERCICE 1. THÉORIE : preuve du théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a < b$ deux réels de I tels que 0 soit compris entre $f(a)$ et $f(b)$. On va montrer que $f(x) = 0$ admet au moins une solution ℓ .

1. Expliquer pourquoi 0 compris entre $f(a)$ et $f(b)$ équivaut à $f(a)f(b) \leq 0$.
2. Soient (a_n) et (b_n) deux suites définies par :

$$a_0 = a, b_0 = b, \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = a & b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} & \text{si } f(a_n)f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \leq 0 \\ a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} & b_{n+1} = b_n & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans le cas où $a = 0$, $b = 1$ et $f(x) = 3x - 1$, calculer a_3 et b_3 .

3. Montrer que $(b_n - a_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
4. Montrer que (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Qu'en conclure ?
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(a_n)f(b_n) \leq 0$. On suppose¹ : $f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$.
6. En déduire que $0 = f(\ell)$.
7. Remarquer que $f(x) = k \iff f(x) - k = 0$. Conclure qu'on a prouvé le TVI.

EXERCICE 2. RECHERCHE PRATIQUE. première méthode

On suppose que l'utilisateur a programmé une fonction f dans Y_1 . Les cadres suivants présentent un algorithme et le programme correspondant en langage TI puis CASIO :

```

Programme RES
Saisir A
Saisir B
Saisir P
Affecter A à I
Tant que I < B Faire
  Si Y1(I) * Y1(I + P) ≤ 0
  Alors
    Afficher I
  FinSi
  Affecter I+P à I
Fin Tant Que
  
```

```

PROGRAM :RES
:Input A
:Input B
:Input P
:A→I
:While (I < B)
:If (Y1(I) * Y1(I + P)) ≤ 0
:Then
:Disp I
:End
:I + P → I
:End
  
```

```

=====RES=====
"A = " :? → A ↓
"B = " :? → B ↓
"P = " :? → P ↓
A→I ↓
While (I < B) ↓
I → X : Y1 → J ↓
I + P → X : Y1 * J → J ↓
If J ≤ 0 Then I ↓
IfEnd ↓
I + P → I ↓
WhileEnd
  
```

1. Sans saisir ce programme dans la calculatrice, prévoir ce que le programme va afficher pour $Y_1(X) = 3X - 1$, $A = 0$, $B = 1$, $P = 0.1$.
2. Expliquer ce que fait le programme en général.
3. Programmer l'algorithme sur votre calculatrice et le tester.

EXERCICE 3. RECHERCHE PRATIQUE : dichotomie

On suppose que l'utilisateur a programmé une fonction f dans Y_1 .

1. Écrire un programme qui demande les valeurs de a, b, n et qui affiche a_n et b_n dans le cas où $k = 0$ et f est rentrée au préalable dans Y_1 .
2. Modifier le programme pour que l'utilisateur entre une précision p au lieu de l'entier n et que le programme affiche a_n et b_n tels que $b_n - a_n < p$.
3. Ajouter au programme un test avant la boucle qui interrompt le programme et affiche « ERREUR » si les hypothèses ne sont pas satisfaites ou si $p \leq 0$.

1. $f(a_n)f(b_n) \leq 0$ signifie qu'au moins une des deux situations : $f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$ ou $f(b_n) \leq 0 \leq f(a_n)$ est satisfaite par une infinité de termes de (a_n) et (b_n) . Quitte à ne s'intéresser qu'à ces termes, et éventuellement considérer $-f$, ce qui suit est vérifiée.