Feuille d'exercices 9 -14-12-11-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

Exercice 1. Croissances comparées

1. Démontrer que $e^x > x$ pour x réel. (méthode : étudier les variations de $x \mapsto e^x - x$).
2. En déduire $\dfrac{e^{2x}}{2x} > \dfrac{x}{2}$ pour $x > 0$. (méthode : élever au carré l'égalité précédente).
3. Conclure quant à la limite de $\dfrac{e^X}{X}$ lorsque X tend vers $+\infty$.
4. En déduire la limite de Xe^{-X} lorsque X tend vers $-\infty$.

Exercice 2.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$.

1. Ensemble de définition
   (a) Restitution de connaissances : étudier la position relative de la courbe de l'exponentielle et de sa tangente au point $A(0;1)$.
   (b) En déduire l'ensemble de définition de f.
2. Calculer et interpréter les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Étude d'une fonction auxiliaire : soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2e^x - xe^x - 1$.
   (a) Calculer les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.
   (b) Étudier les variations de g.
   (c) Montrer que $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β.
   (d) Donner des valeurs approchées à 10^{-1} près de α et β.
   (e) Étudier le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.
4. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^x - x)^2}$ pour x réel.
5. Dresser le tableau de variations complet de f.
6. Tangente à l'origine.
   (a) Étudier les variations de $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x - 1 - xe^x + x^2$. En déduire que $h(x) = 0$ admet exactement deux solutions que l'on déterminera.
   (b) Déterminer la position relative de la courbe de f et de sa tangente à l'origine.
7. Représenter la courbe de f et ses éléments remarquables.

Exercice 3. Facultatif : concours général

Soit f une fonction définie et continue sur $[0;1]$ telle que $f(x) \neq f\left(x + \dfrac{3}{10}\right)$ pour tout $x \in [0; \frac{7}{10}]$ et $f(0) = f(1) = 0$. Démontrer que f s'annule au moins 7 fois.

Exercice 4.

Un capital C rapport chaque année $t\%$ d'intérêts (qui sont calculés à partir du capital et des intérêts déjà obtenus). Au bout de quinze ans, le capital a doublé. Que vaut t (à 0,01 près) ?

Exercice 5.

Soit un réel $\omega > 0$ et (E) l'équation différentielle $y'' + \omega^2\ y = 0$.

1. Montrer que si y est solution de (E) alors la fonction f définie par $f(x) = (\omega\ y)^2 + (y')^2$ sur $\mathbb{R}$ est une fonction constante.
2. En déduire qu'une solution y de (E) est la fonction nulle si et seulement si $y(0) = y'(0) = 0$.
3. Soit y une solution de (E), et h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(t) = y(t) - (y(0)\cos(\omega\ t) + \frac{1}{\omega}y'(0)\ \sin(\omega t))$$

   Montrer que h est solution de (E). Que valent $h(0)$, $h'(0)$, $h(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$?
4. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).
5. Soit $\omega = 2$ et y la solution de (E) telle que $y(0) = \sqrt{2}$ et $y'(0) = 2\sqrt{2}$. Montrer que pour tout réel t, $y(t) = 2\cos(2t - \frac{\pi}{4})$.