FEUILLE D'EXERCICES 7 : EXPONENTIELLE -22-11-11-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

EXERCICE 1.

On admet que lorsqu'une substance médicamenteuse est injectée directement dans le sang, sa vitesse d'élimination à chaque instant est proportionnelle à la quantité de cette substance présente dans le sang à cet instant.
On injecte en continue A mg de pénicilline à un patient par heure et on note $k > 0$ la constante de proportionnalité évoquée plus haut. On note $Q(t)$ la quantité (en mg) de pénicilline présente dans le sang à l'instant t (en heures). On suppose $Q(0) = 0$.

1. Expliquer pourquoi Q vérifie l'équation différentielle $Q'(t) = A - k\ Q(t)$.
2. Exprimer $Q(t)$ en fonction de A et de k.
3. Dresser le tableau de variations complet de Q (en fonction de A et k).
4. Sachant que la moitié de la quantité limite est atteinte en 3 heures, donner une approximation de k. (On pourra utiliser $0,5 \approx e^{-0,69}$).
5. Quelle quantité A de pénicilline faut-il injecter à chaque minute pour maintenir environ 80 mg dans le sang à long terme ?

EXERCICE 2.

On considère l'équation différentielle $(E) :\ y' = 2y + \cos\ x$.

1. Déterminer les réels a et b tels que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = a\cos x + b\sin x$ soit solution de l'équation différentielle (E).
2. Résoudre l'équation différentielle $(H) : y' = 2y$.
3. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - f_0$ est solution de (H).
4. En déduire l'ensemble des solutions de (E), puis la solution h de (E) telle que $h(\frac{\pi}{2}) = 0$.

EXERCICE 3.

On considère l'équation différentielle $(E) :\ y' - y = e^x$ où $x \in \mathbb{R}$.

1. Étude de l'équation différentielle (E).
   (a) Montrer que si y est une solution de (E), alors y' est une solution de (E). Comment trouver une expression de y' à partir de y ?
   (b) Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f_(x) = xe^x$ est une solution de (E).
   (c) Résoudre $(H) :\ y' - y = 0$ et montrer qu'une fonction y est solution de (E) si et seulement si $y - f$ est solution de (H). En déduire l'ensemble des solutions de (E).
2. Étude d'une famille de solutions.
   (a) On note $f^{(n)}$ la dérivée n-ème de f. À partir des deux premières questions, montrer que $f^{(n)} = (n + x)e^x$ pour tous x réel et n entier naturel.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer les limites de $f^{(n)}$ en $+\infty$ et $-\infty$.
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, étudier le signe de $f^{(n)}$.
   (d) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le tableau de variation complet de $f^{(n)}$.
   (e) Déterminer la position relative de $f^{(n)}$ et de sa tangente au point d'abscisse $-(n+2)$. (on pourra étudier les variations de la différence à considérer).
3. Montrer que la suite des minimums de $f^{(n)}$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison et la limite.
4. Donner l'ensemble des fonctions y telles que $y' = f$.