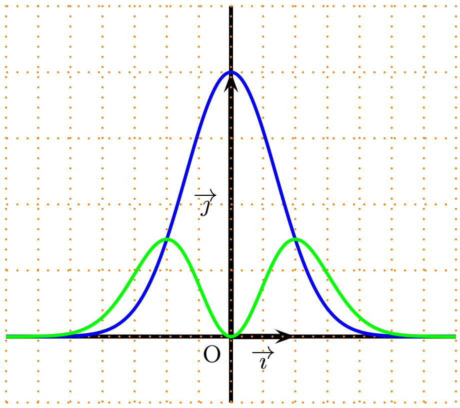
Feuille d'exercices 6 : Fonction exponentielle -15-11-11-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

Exercice 1.

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ et $g(x) = x^2\mathrm{e}^{-x^2}$.

On note respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives de f et g dans un repère orthogonal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, dont les tracés se trouvent sur la feuille annexe. La figure sera complétée et rendue avec la copie.



1. Identifier $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur la figure fournie. (Justifier la réponse apportée).
2. Étudier la parité des fonctions f et g.
3. Étudier le sens de variation de f et de g. Étudier les limites éventuelles de f et de g en $+\infty$.
4. Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Exercice 2.

A - Restitution organisée de connaissances

On suppose connu le résultat suivant : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$. Démontrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$.

B - Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}$.
On note $(\mathcal{C})$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan. On prendra 4 cm pour unité graphique.

1. Étudier les variations de la fonction f et les limites aux bornes de son ensemble de définition. Résumer ces éléments dans un tableau de variations le plus complet possible.
2. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$. On fera apparaître les résultats obtenus précédemment.

C - Étude d'une famille de fonctions

Pour tout entier relatif k, on note f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = (x+1)\mathrm{e}^{kx}$.
On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal du plan. On remarque que le cas $k = -1$ a été traité dans la partie B, car on a $f_{-1} = f$ et $\mathcal{C}_{-1} = \mathcal{C}$.

1. (a) Quelle est la nature de la fonction f_0 ?
   (b) Déterminer les points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$.
   Vérifier que, pour tout entier k, ces points appartiennent à la courbe $\mathcal{C}_k$.
2. Étudier, suivant les valeurs du réel x, le signe de l'expression : $(x+1)(\mathrm{e}^x - 1)$.
   En déduire, pour k entier relatif donné, les positions relatives des courbes $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}_{k+1}$.
3. Calculer $f'_k(x)$ pour tout réel x et pour tout entier k non nul.
   En déduire le sens de variation de la fonction f_k suivant les valeurs de k. (On distinguera les cas : $k > 0$ et $k < 0$.)