Feuille d'exercices 5 : Fonction exponentielle -9-11-11-
Terminale S 2, 2010-2011, Y. Angeli

On admet qu'il existe une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ notée exp, et appelée fonction exponentielle, qui vérifie les deux propriétés : $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$.

Partie A : unicité

1. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Montrer que $\exp(u)$ est une fonction dérivable sur I de dérivée $u' \exp(u)$.
2. On va montrer : pour tout x : $\exp(-x)\exp(x) = 1$, et $\exp(x) \neq 0$.
   (a) Soit h la fonction définie par $h(x) = \exp(-x)\exp(x)$. Calculer $h(0)$.
   (b) Montrer que h est dérivable et calculer $h'(x)$. En déduire $h(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (c) Conclure.
3. On va montrer : exp est la seule fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$.
   (a) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 1$ et $f' = f$. Soit g la fonction définie par $g(x) = f(x)/\exp(x)$. Donner l'ensemble définition et de dérivabilité de g.
   (b) Calculer $g'(x)$. En déduire la valeur de $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (c) Conclure.

Partie B : propriétés algébriques

1. On va montrer : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\exp(x)\exp(y) = \exp(x + y)$.
   (a) Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. Soit u la fonction définie par $u(x) = \dfrac{\exp(x + y)}{\exp(y)}$. Calculer $u(0)$.
   (b) Montrer que u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $u' = u$.
   (c) Conclure.
2. On va montrer : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\exp(x - y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$ et : $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.
   (b) Conclure.
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $\exp(nx) = \exp(x)^n$. En déduire la même propriété pour $n \in \mathbb{Z}$.
4. Calculer $\exp\left(\frac{x}{2}\right)^2$. En déduire : $\exp(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\exp\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\exp(x)}$.

Partie C : étude de la fonction exp

1. Déterminer le sens de variation de la fonction exp.
2. On va étudier la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ de exp au point d'abscisse 0.
   (a) Déterminer l'équation réduite de la tangente T.
   (b) Étudier la fonction $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp(x) - x - 1$.
   (c) En déduire la position relative de T et de $\mathcal{C}$.
3. Déduire de ce qui précède $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x)$.
4. Déduire de B2a : $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x)$. Interpréter.