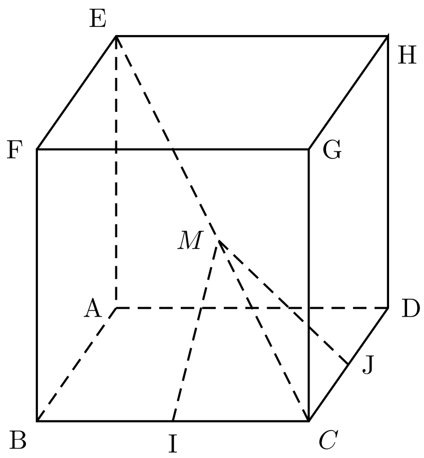
Feuille d'exercices 37 -08-06-12-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

Exercice 1. Centres étrangers juin 2011

La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH d'arête 1.
On désigne par I et J les milieux respectifs des arêtes [BC] et [CD].
Soit M un point quelconque du segment [CE].
Dans tout l'exercice, on se place dans le repère orthonormal $\left(\text{A}\ ;\ \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.



1. (a) Donner, sans justification, les coordonnées des points C, E, I et J.
   (b) Justifier l'existence d'un réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$, tel que les coordonnées du point M soient $(1-t\ ;\ 1-t\ ;\ t)$.
2. (a) Démontrer que les points C et E appartiennent au plan médiateur du segment [IJ].
   (b) En déduire que le triangle MIJ est un triangle isocèle en M.
   (c) Exprimer $\text{I}M^2$ en fonction de t.
3. Le but de cette question est de déterminer la position du point M sur le segment [CE] pour laquelle la mesure de l'angle $\widehat{\text{I}M\text{J}}$ est maximale.
   On désigne par θ la mesure en radian de l'angle $\widehat{\text{I}M\text{J}}$.
   (a) En admettant que la mesure θ appartient à l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$, démontrer que la mesure θ est maximale lorsque $\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ est maximal.
   (b) En déduire que la mesure est maximale lorsque la longueur IM est minimale.
   (c) Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :
   $$f(t) = 3t^2 - t + \frac{1}{4}.$$
   (d) En déduire qu'il existe une unique position M_0 du point M sur le segment [EC] telle que la mesure de l'angle $\widehat{\text{I}M\text{J}}$ soit maximale.
   (e) Démontrer que le point M_0 est le projeté orthogonal du point I sur le segment [EC].