Feuille d'exercices 36 -06-06-12-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

Exercice 1. Amérique du Nord 2012

Partie A : ROC

On rappelle que $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{e^t}{t} = +\infty$. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

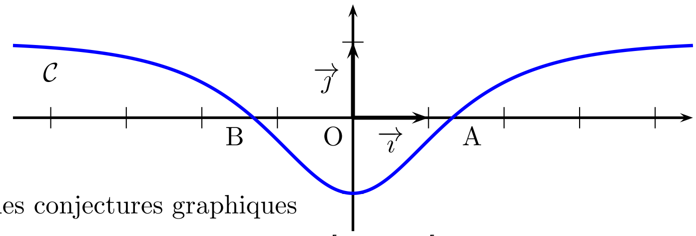
Partie B. On considère la fonction f définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x) = x - \dfrac{\ln(x)}{x}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Soit g définie sur $[1\,;+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$. Montrer que la fonction g est positive sur $[1\,;+\infty[$.
2. (a) Montrer que, pour tout x de $[1\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   (b) En déduire le sens de variation de f sur $[1\,;+\infty[$.
   (c) Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.
   (d) Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$.
3. Pour tout entier $k \geqslant 2$, on note respectivement M_k et N_k les points d'abscisse k de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.
   (a) Montrer que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la distance M_kN_k entre les points M_k et N_k est donnée par $M_kN_k = \dfrac{\ln(k)}{k}$.
   (b) Écrire un algorithme déterminant le plus petit entier k_0 supérieur ou égal à 2 tel que la distance M_kN_k soit inférieur ou égale à 10^{-2}.

Exercice 2. La Réunion juin 2011

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - \dfrac{4e^x}{e^{2x}+1}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthogonal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe $\mathcal{C}$. Elle coupe l'axe des abscisses aux points A et B.



Partie A : Démontrer des conjectures graphiques

1. La fonction f semble croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   (a) Vérifier que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{4e^x\left(e^{2x}-1\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$.
   (b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
2. La droite d'équation $x = 0$ semble être un axe de symétrie de la courbe $\mathcal{C}$.
   Démontrer que cette conjecture est vraie.
3. On désigne par a l'abscisse du point A et on pose $c = e^a$.
   (a) Démontrer que le réel c est une solution de l'équation $x^2 - 4x + 1 = 0$. En déduire la valeur de a.
   (b) Donner le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B Étude de quelques propriétés de la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

1. Déterminer les variations de la fonction F sur $\mathbb{R}$.
2. Interpréter géométriquement le réel $F(a)$. En déduire que $-a \leqslant F(a) \leqslant 0$.
3. On cherche la limite éventuelle de F en $-\infty$.
   (a) Démontrer que pour tout réel positif t, $f(t) \geqslant 1 - 4e^{-t}$.
   (b) En déduire que pour tout réel positif x, $F(x) \geqslant x - 4$ et déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
4. Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.