Feuille d'exercices 35 -05-06-12-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

Exercice 1. Amérique du Nord mai 2012

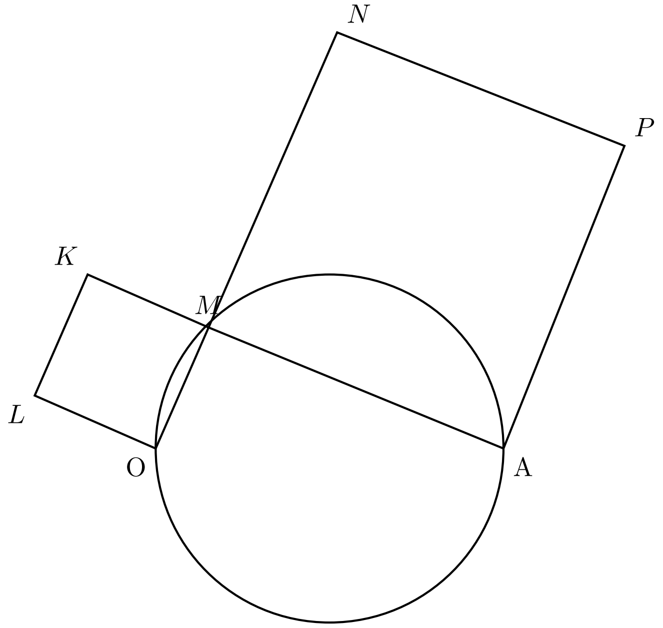
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère l'application f du plan dans lui même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = z^2$.

On note Ω le point d'affixe 1.

1. Déterminer l'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que $f(M) = M$.
2. Soit A le point d'affixe $a = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$.
   (a) Exprimer a sous forme exponentielle.
   (b) En déduire les affixes des deux antécédents de A par f.
3. Déterminer l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z tels que l'affixe z' du point M' soit un nombre imaginaire pur.
4. Dans cette question, on souhaite déterminer l'ensemble Γ_3 des points M distincts de Ω pour lesquels le triangle $\Omega M M'$ est rectangle issocèle direct en Ω.
   (a) À l'aide de la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$, montrer que M est un point de Γ_3 si et seulement si $z^2 - iz - 1 + i = 0$ et $z \neq 1$.
   (b) Montrer que $z^2 - iz - 1 + i = (z-1)(z+1-i)$.
   (c) En déduire l'ensemble Γ_3.
5. Soit M un point d'affixe z différente de 0 et e 1.
   (a) Exprimer $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right)$ en fonction d'un argument de z.
   (b) En déduire l'ensemble Γ_4 des points M distincts de O et de Ω tels que O, M et M' soient alignés.

Exercice 2. Métropole juin 2005



Dans le plan orienté, on considère les points O et A fixés et distincts, le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [OA], un point M variable appartenant au cercle $\mathcal{C}$, et distinct des points O et A, ainsi que les carrés de sens direct $MAPN$ et $MKLO$. La figure est représentée ci-dessus.

Le but de l'exercice est de mettre en évidence quelques éléments invariants de la figure et de montrer que le point N appartient à un cercle à déterminer.

On munit le plan complexe d'un repère orthonormal direct de sorte que les affixes des points O et A soient respectivement 0 et 1.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. On note $k,\ l,\ m,\ n$ et p les affixes respectives des points $K,\ L,\ M,\ N$ et P.

1. Démontrer que, quel que soit le point M choisi sur le cercle $\mathcal{C}$, on a
$\left|m - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$.
2. Établir les relations suivantes : $l = \mathrm{i}m$ et $p = -\mathrm{i}m + 1 + \mathrm{i}$. On admettra que l'on a également $n = (1-\mathrm{i})m + \mathrm{i}$ et $k = (1+\mathrm{i})m$.
3. (a) Démontrer que le milieu Ω du segment [PL] est un point indépendant de la position du point M sur le cercle $\mathcal{C}$.
   (b) Démontrer que le point Ω appartient au cercle $\mathcal{C}$ et préciser sa position sur ce cercle.
4. (a) Calculer la distance KN et démontrer que cette distance est constante.
   (b) Quelle est la nature du triangle ΩNK ?
5. Démontrer que le point N appartient à un cercle fixe, indépendant du point M, dont on déterminera le centre et le rayon.