Feuille d'exercices 33 -30-05-12-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

Exercice 1. Pondichery avril 2008

On cherche à modéliser de deux façons différentes l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écran plat, en fonction de l'année.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : un modèle discret

Soit u_n le nombre, exprimé en millions, de foyers possédant un téléviseur à écran plat l'année n.

On pose $n = 0$ en 2005, $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{10}u_n(20 - u_n)$.

1. Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ 20]$ par $f(x) = \frac{1}{10}x(20 - x)$.
   (a) Étudier les variations de f sur $[0\ ;\ 20]$.
   (b) En déduire que pour tout $x \in [0\ ;\ 20]$, $f(x) \in [0\ ;\ 10]$.
   (c) On donne en **annexe** la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormal. Représenter, sur l'axe des abscisses, à l'aide de ce graphique, les 5 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

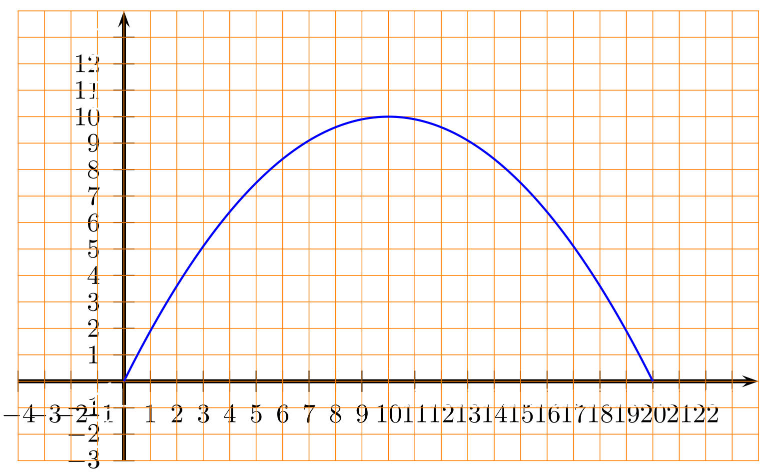
Partie B : un modèle continu

Soit $g(x)$ le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année x.

On pose $x = 0$ en 2005, $g(0) = 1$ et g est une solution, qui ne s'annule pas sur $[0\ ;\ +\infty[$, de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \quad ; \quad y' = \frac{1}{20}y(10 - y).$$

1. On considère une fonction y qui ne s'annule pas sur $[0\ ;\ +\infty[$ et on pose $z = \frac{1}{y}$.
   (a) Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle :
   $$(\mathrm{E}_1) \quad : \quad z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20}.$$
   (b) Résoudre l'équation (E_1) et en déduire les solutions de l'équation (E).
2. Montrer que g est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{10}{9\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + 1}$.
3. Étudier les variations de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.
4. Calculer la limite de g en $+\infty$ et interpréter le résultat.
5. En quelle année le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera-t-il 5 millions ?



Exercice 2. La réunion septembre 2010

Pour tout nombre réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f_k(x) = \ln(x) - kx^2 + 1.$$

Partie A

1. Déterminer la limite de la fonction f_k en 0.
2. On rappelle que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

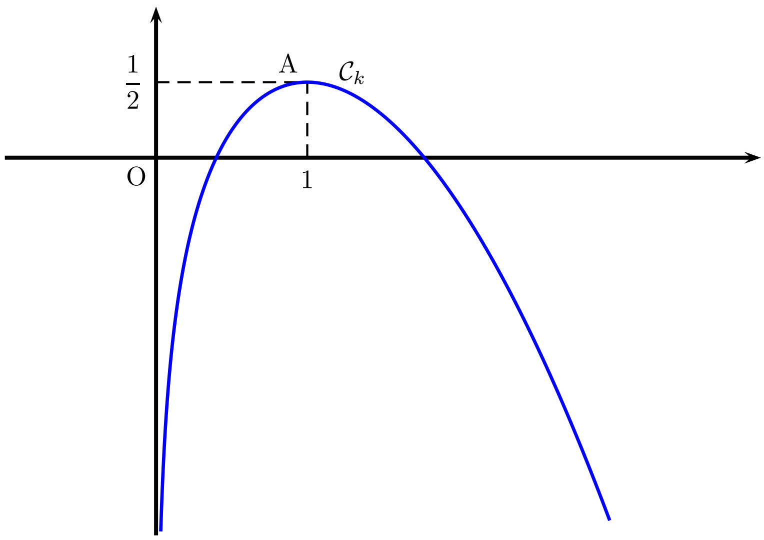
   Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$.

   En déduire la limite de la fonction f_k en $+\infty$.
3. Montrer que, pour tout nombre réel x strictement positif, $f_k'(x) = \dfrac{1 - 2kx^2}{x}$.
4. Pour un nombre réel k strictement positif : on donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction f_k.

x	0		$\dfrac{1}{\sqrt{2k}}$		$+\infty$
$f_k(x)$	||	$\nearrow$	$\dfrac{1 - \ln(2k)}{2}$	$\searrow$	

   Justifier les renseignements sur les variations de la fonction f_k figurant dans ce tableau.
5. On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_k$ représentative d'une fonction f_k pour une certaine valeur du nombre réel k strictement positif. Le point $\mathrm{A}\left(1\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_k$.

   Quelle est la valeur du nombre réel k correspondant ? Justifier la démarche.



Partie B

Dans cette partie on pose $k = \dfrac{1}{2}$.

1. Calculer $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln(x)\,\mathrm{d}x$. On pourra utiliser une intégration par parties.
2. Calculer, en unité d'aire, la mesure de l'aire du domaine délimité par la courbe représentative de la fonction $f_{\frac{1}{2}}$ l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = 1$.