Feuille d'exercices 32 : Sphères et cercles -29-05-12-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

Exercice 1. Amérique du Sud novembre 2010

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit A, B et P les points d'affixes respectives $a = 5 + 5\mathrm{i}$, $b = 5 - 5\mathrm{i}$ et $p = 10$.
On considère un point M, distinct de O, d'affixe z.
On note U le point d'affixe u, image du point M par la rotation R_{A} de centre A et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{2}$.
On note T le point d'affixe t, image du point M par la rotation R_{B} de centre B et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.
Soit D le symétrique du point M par rapport à O.

1. Démontrer que l'affixe du point U est $u = \mathrm{i}(10 - z)$; exprimer en fonction de z l'affixe du point T puis justifier que le quadrilatère $MUDT$ est un parallélogramme de centre O.
2. Déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe z tels que : $z\overline{z} - 5z - 5\overline{z} = 0$.
   Justifier que le quadrilatère OAPB est inscrit dans Γ.
3. On suppose que le point M est distinct de O, A et P. Les points O, M et U sont donc distincts deux à deux.
   (a) Démontrer que les points O, M et U sont alignés si et seulement si $\dfrac{u}{z} = \dfrac{\overline{u}}{\overline{z}}$.
   (b) Démontrer que les points O, M et U sont alignés si et seulement si M appartient à Γ.
4. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que OMU soit un triangle isocèle en O. Quelle est dans ce cas la nature du quadrilatère $MUDT$?
5. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $\dfrac{u}{z}$ soit un imaginaire pur. En déduire la nature du quadrilatère $MUDT$ dans le cas où M est un point de la droite (OP) privée de O et P.
   Prouver finalement qu'il existe une unique position du point M tel que $MUDT$ soit un carré.

Exercice 2. Liban mai 2011

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k})$, on donne les trois points :

$$\mathrm{A}(1\ ;\ 2\ ;\ -1), \mathrm{B}(-3\ ;\ -2\ ;\ 3) \text{ et } \mathrm{C}(0\ ;\ -2\ ;\ -3)$$

1. (a) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   (b) Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2\ ;\ -1\ ;\ 1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
2. Soit (P) le plan dont une équation cartésienne est $x + y - z + 2 = 0$.
   Démontrer que les plans (ABC) et (P) sont perpendiculaires.
3. On appelle G le barycentre des points pondérés (A, 1), (B, -1) et (C, 2).
   (a) Démontrer que le point G a pour coordonnées $(2\ ;\ 0\ ;\ -5)$.
   (b) Démontrer que la droite (CG) est orthogonale au plan (P).
   (c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CG).
   (d) Déterminer les coordonnées du point H, intersection du plan (P) avec la droite (CG).
4. Démontrer que l'ensemble (S) des points M de l'espace tels que
   $\left\|\overrightarrow{M\mathrm{A}} - \overrightarrow{M\mathrm{B}} + 2\overrightarrow{M\mathrm{C}}\right\| = 12$ est une sphère dont on déterminera les éléments caractéristiques.
5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'intersection du plan (P) et de la sphère (S).