Feuille d'exercices 31 -21-05-12-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

Exercice 1. Complexes : QCM

1. Soit z le nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et d'argument $\frac{\pi}{3}$. On a alors :

   A : $z^{14} = -128\sqrt{3} - 128\mathrm{i}$. C : $z^{14} = -64 + 64\mathrm{i}\sqrt{3}$.
   B : $z^{14} = 64 - 64\mathrm{i}$. D : $z^{14} = -128 + 128\mathrm{i}\sqrt{3}$

2. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, le point S d'affixe 3 et le point T d'affixe 4i. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 3| = |3 - 4\mathrm{i}|$.
   A : (E) est la médiatrice du segment [ST] ;
   B : (E) est la droite (ST) ;
   C : (E) est le cercle de centre Ω d'affixe $3 - 4\mathrm{i}$, et de rayon 3 ;
   D : (E) est le cercle de centre S et de rayon 5.

3. On considère un hexagone régulier ABCDEF, dont les côtés sont de longueur 1. Le produit scalaire $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CF}$ est égal à :

   A : $\sqrt{3}$ B : -3 C : $-\sqrt{3}$ D ; $\frac{3}{2}$.

4. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant : $z = 1 - 2\mathrm{i} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, θ étant un nombre réel.
   (a) (E) est une droite passant par le point d'affixe $2 - 2\mathrm{i}$.
   (b) (E) est le cercle de centre d'affixe $-1 + 2\mathrm{i}$ et de rayon 1.
   (c) (E) est le cercle de centre d'affixe $1 - 2\mathrm{i}$ et de rayon 1.
   (d) (E) est le cercle de centre d'affixe $1 - 2\mathrm{i}$ et de rayon $\sqrt{5}$.

5. Soit f l'application du plan qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -\mathrm{i}z - 2\mathrm{i}$.
   (a) f est une homothétie.
   (b) Le point d'affixe $-1 - 2\mathrm{i}$ est un antécédent du point d'affixe i.
   (c) f est la rotation de centre le point d'affixe $1 + \mathrm{i}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
   (d) f est la rotation de centre le point d'affixe $-1 - \mathrm{i}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

6. Soit (F) l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z - 1 + \mathrm{i}| = |z + 1 + 2\mathrm{i}|$.
   Soient les points A, B et C d' affixes respectives $1 - \mathrm{i}$, $-1 + 2\mathrm{i}$ et $-1 - 2\mathrm{i}$.
   (a) C est un point de (F).
   (b) (F) est la médiatrice du segment [AB].
   (c) (F) est la médiatrice du segment [AC].
   (d) (F) est le cercle de diamètre [AB].

7. On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z + |z|^2 = 7 + \mathrm{i}$. Cette équation admet :
   (a) Deux solutions distinctes qui ont pour partie imaginaire 1.
   (b) Une solution réelle.
   (c) Deux solutions dont une seule a pour partie imaginaire 1.
   (d) Une solution qui a pour partie imaginaire 2.

8. Une solution de l'équation $2z + \overline{z} = 9 + \mathrm{i}$ est : **a.** 3 **b.** i **c.** $3 + \mathrm{i}$

9. Soit n un entier naturel. Le complexe $\left(\sqrt{3} + \mathrm{i}\right)^n$ est un imaginaire pur si et seulement si :
   a. $n = 3$ **b.**$n = 6k + 3$, avec k relatif **c.** $n = 6k$ avec k relatif

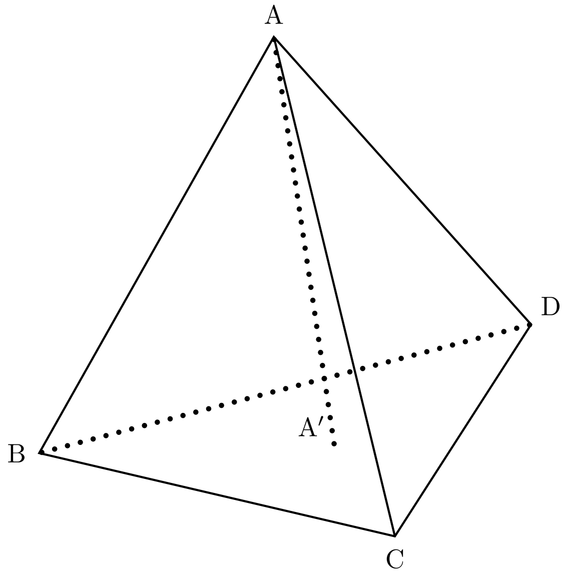
10. Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ. Un argument de $\frac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{\overline{z}}$ est :

    a. $-\frac{\pi}{3} + \theta$ **b.** $\frac{2\pi}{3} + \theta$ **c.** $\frac{2\pi}{3} - \theta$

EXERCICE 2. Espace : sans coordonnées : Pondichery avril 2011

Partie 1

Dans cette partie, ABCD est un tétraèdre régulier, c'est-à-dire un solide dont les quatre faces sont des triangles équilatéraux.



A′ est le centre de gravité du triangle BCD.

Dans un tétraèdre, le segment joignant un sommet au centre de gravité de la face opposée est appelé médiane. Ainsi, le segment [AA′] est une médiane du tétraèdre ABCD.

1. On souhaite démontrer la propriété suivante :
   ($\mathcal{P}_1$) : *Dans un tétraèdre régulier, chaque médiane est orthogonale à la face opposée.*
   (a) Montrer que $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ et que $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. (On pourra utiliser le milieu I du segment [BD] et le milieu J du segment [BC]).
   (b) En déduire que la médiane (AA′) est orthogonale à la face BCD.
   Un raisonnement analogue montre que les autres médianes du tétraèdre régulier ABCD sont également orthogonales à leur face opposée.
2. G est l'isobarycentre des points A, B, C et D.
   On souhaite démontrer la propriété suivante :
   ($\mathcal{P}_2$) : *Les médianes d'un tétraèdre régulier sont concourantes en* G.
   En utilisant l'associativité du barycentre, montrer que G appartient à la droite (AA′), puis conclure.

Partie II

On munit l'espace d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.
On considère les points P(1 ; 2 ; 3), Q(4 ; 2 ; −1) et R(−2 ; 3 ; 0).

1. Montrer que le tétraèdre OPQR n'est pas régulier.
2. Calculer les coordonnées de P′, centre de gravité du triangle OQR.
3. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (OQR) est : $3x + 2y + 16z = 0$.
4. La propriété ($\mathcal{P}_1$) de la partie 1 est-elle vraie dans un tétraèdre quelconque ?

EXERCICE 3. Antilles-Guyane juin 2005

1. Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $[0\,;\,1]$:

$$\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} \leqslant \frac{1}{x+n} \leqslant \frac{1}{n}.$$

2. (a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+n}\,\mathrm{d}x$.

   (b) Déduire en utilisant **1.**, que :

$$\text{pour } n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \qquad (1)$$

$$\text{puis que} \quad \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}.$$

3. On appelle U la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$U(n) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \ln(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n).$$

   Démontrer que U est décroissante (on pourra utiliser **2. b.**.)

4. On désigne par V la suite de terme général :

$$V(n) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1).$$

   Démontrer que V est croissante.

5. Démontrer que U et V convergent vers une limite commune notée γ.
   Déterminer une valeur approchée de γ à 10^{-2} près par la méthode de votre choix.

6. (Bonus) : écrire un programme qui calcule le terme de rang n de la suite $V(n)$ afin d'obtenir un résultat aussi précis que possible. (des programmes ont déjà calculer 10 000 000 de décimales de γ, mais on ignore toujours si la constante d'Euler est un nombre rationnel ou pas)