Feuille d'exercices 30 -16-05-12-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

Exercice 1. Nouvelle Calédonie novembre 2009 : 5 points

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k})$. On considère les points :

$$\text{A}(4\ ;\ 0\ ;\ 0),\quad \text{B}(0\ ;\ 2\ ;\ 0),\quad \text{C}(0\ ;\ 0\ ;\ 3)\quad \text{et E}\left(\frac{2}{3}\ ;\ -\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{9}\right)$$

On se propose de déterminer de deux façons la distance δ_{E} du point E au plan (ABC).

1. (a) Montrer que les points A, B et C déterminent bien un plan.
   (b) Soit $\overrightarrow{n}$ le vecteur de coordonnées $(3\,;6\,;4)$.
   Montrer que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   (c) Montrer qu'une équation du plan (ABC) est : $3x+6y+4z-12=0$.
   (d) Déduire des questions précédentes la distance δ_{E}.
2. (a) Montrer que la droite $(\mathcal{D})$ de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1+t \\ y & = & 2t \\ z & = & \frac{5}{9}+\frac{4}{3}t \end{array}\right. \quad \text{où } t\in\mathbb{R},$$

   est perpendiculaire au plan (ABC) et passe par le point E.
   (b) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal G du point E sur le plan (ABC).
   (c) Retrouver à partir des coordonnées des points E et G la distance δ_{E}.

Exercice 2. Nouvelle Calédonie novembre 2009 : 6 points

Soit f une fonction définie pour tout nombre réel x par $f(x)=(1+x)\mathrm{e}^{-x}$.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité graphique 1 cm.

1. (a) Étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
   Déterminer la limite de la fonction $f$en $+\infty$.
   (c) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   Calculer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$.
   En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   (d) Tracer la courbe représentative de la fonction f sur J'intervalle $[-2\ ;\ 5]$.
2. On note (I_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n=\int_{-1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

   Dans cette question, on ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n.
   (a) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $I_n\geqslant 0$.
   (b) Montrer que la suite (I_n) est croissante.
3. (a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tous réels a et b :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=(-2-b)\mathrm{e}^{-b}+(2+a)\mathrm{e}^{-a}.$$

   (b) En déduire l'expression de I_n en fonction de n.
   (c) Déterminer : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
   (d) Donner une interprétation graphique de cette limite.
4. Déterminer $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que : $\displaystyle\int_{-1}^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}$.
   Ce calcul intégral correspond-il à un calcul d'aire ?