Feuille d'exercices 29 -15-05-12-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

Exercice 1. Pondichery avril 2012

Partie A

Un groupe de 50 coureurs, portant des dossards numérotés de 1 à 50, participe à une course cycliste qui comprend 10 étapes, et au cours de laquelle aucun abandon n'est constaté.

À la fin de chaque étape, un groupe de 5 coureurs est choisi au hasard pour subir un contrôle antidopage. Ces désignations de 5 coureurs à l'issue de chacune des étapes sont indépendantes. Un même coureur peut donc être contrôlé à l'issue de plusieurs étapes.

1. À l'issue de chaque étape, combien peut-on former de groupes différents de 5 coureurs ?
2. On considère l'algorithme ci-dessous dans lequel :
   - ⋆ « rand(1, 50) » permet d'obtenir un nombre entier aléatoire appartenant à l'intervalle $[1\,;\,50]$
   - ⋆ l'écriture « $x := y$ » désigne l'affectation d'une valeur y à une variable x.

Variables	a, b, c, d, e sont des variables du type entier
Initialisation	$a := 0$; $b := 0$; $c := 0$; $d := 0$; $e := 0$
Traitement	Tant que $(a = b)$ ou $(a = c)$ ou $(a = d)$ ou $(a = e)$ ou $(b = c)$ ou $(b = d)$ ou $(b = e)$ ou $(c = d)$ ou $(c = e)$ ou $(d = e)$ Début du tant que $a :=$ rand(1, 50) ; $b :=$ rand(1, 50) ; $c :=$ rand(1, 50) ; $d :=$ rand(1, 50) ; $e :=$ rand(1, 50) Fin du tant que
Sortie	Afficher a, b, c, d, e

   (a) Parmi les ensembles de nombres suivants, lesquels ont pu être obtenus avec cet algorithme :
   $L_1 = \{2\ ;\ 11\ ;\ 44\ ;\ 2\ ;\ 15\}$; $L_2 = \{8, 17, 41, 34, 6\}$;
   $L_3 = \{12, 17, 23, 17, 50\}$; $L_4 = \{45, 19, 43, 21, 18\}$?

   (b) Que permet de réaliser cet algorithme concernant la course cycliste ?
3. À l'issue d'une étape, on choisit au hasard un coureur parmi les 50 participants. Établir que la probabilité pour qu'il subisse le contrôle prévu pour cette étape est égale à $0,1$.
4. On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de contrôles subis par un coureur sur l'ensemble des 10 étapes de la course.

   (a) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.

   (b) On choisit au hasard un coureur à l'arrivée de la course. Calculer, sous forme décimale arrondie au dix-millième, les probabilités des évènements suivants :
   - ⋆ il a été contrôlé 5 fois exactement ;
   - ⋆ il n'a pas été contrôlé ;
   - ⋆ il a été contrôlé au moins une fois.

Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

Pour un coureur choisi au hasard dans l'ensemble des 50 coureurs, on appelle T l'évènement : « le contrôle est positif », et d'après des statistiques, on admet que $P(T) = 0,05$.
On appelle D l'évènement : « le coureur est dopé ».
Le contrôle anti-dopage n'étant pas fiable à 100 %, on sait que :
⋆ si un coureur est dopé, le contrôle est positif dans 97 % des cas ;
⋆ si un coureur n'est pas dopé, le contrôle est positif dans 1 % des cas.

1. Calculer $P(D)$.
2. Un coureur a un contrôle positif. Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas dopé ?

Exercice 2. Centres étrangers juin 2006

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces portent les nombres 1, 2, 3 et 4.
On lit le nombre sur la face cachée.
Pour $k \in \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4)$, on note p_i la probabilité d'obtenir le nombre k sur la face cachée.
Le dé est déséquilibré, de sorte que $p_1,\ p_2,\ p_3$ et p_4 dans cet ordre, forment une progression arithmétique.

1. Sachant que $p_4 = 0,4$ démontrer que $p_1 = 0,1,\ p_2 = 0,2$ et $p_3 = 0,3$.
2. On lance le dé trois lois de suite. On suppose que les lancers sont deux à deux indépendants.
   (a) Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre les nombres 1, 2, 4 ?
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir trois nombres distincts rangés dans l'ordre croissant ?
3. On lance 10 fois de suite le dé. On suppose les lancers deux à deux indépendants. On note X la variable aléatoire qui décompte le nombre de fois où le chiffre 4 est obtenu.
   (a) Pour $1 \leqslant i \leqslant 10$, exprimer en fonction de i la probabilité de l'évènement $(X = i)$.
   (b) Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter le résultat obtenu.
   (c) Calculer la probabilité de l'évènement $(X \geqslant 1)$. On donnera une valeur arrondie au millième.
4. Soit n un entier naturel non nul. On lance n fois le dé, les lancers étant encore supposés indépendants deux à deux.
   On note U_n la probabilité d'obtenir pour la première fois le nombre 4 au n-ième lancer.
   (a) Montrer que (U_n) est une suite géométrique et qu'elle est convergente.
   (b) Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} U_i$ puis étudier la convergence de la suite (S_n).
   (c) Déterminer le plus petit entier n tel que $S_n > 0,999$.

Exercice 3. Antilles-Guyane juin 2010

*Pour chacune des questions suivantes, **une ou deux des réponses** proposées sont correctes.*
(1 point par question, -0.25 par réponse fausse, 0 sans réponse)

1. On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.
   La probabilité de n'obtenir ni un as, ni un pique, est égale à :
   A : $\dfrac{5}{8}$ **B :** $\dfrac{21}{32}$ **C :** $\dfrac{11}{32}$ **D :** $\dfrac{3}{8}$
2. On tire au hasard et simultanément deux cartes d'un jeu de 32 cartes.
   La probabilité de n'obtenir ni un as, ni un pique, est égale à :
   A : $\dfrac{105}{248}$ **B :** $\dfrac{\binom{21}{2}}{\binom{32}{2}}$ **C :** $\dfrac{21^2}{32^2}$ **D :** $\dfrac{5^2}{8^2}$
3. On suppose que la durée d'attente à un guichet de service, exprimée en heure, suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.
   La probabilité que la durée d'attente d'une personne prise au hasard soit comprise entre 15 min et 20 min est :
   A : $\dfrac{1}{3}$ **B :** $\dfrac{1}{5}$ **C :** $\dfrac{1}{12}$ **D :** $\dfrac{1}{4}$
4. On considère 10 appareils identiques, de même garantie, fonctionnant indépendamment les uns des autres. La probabilité pour chaque appareil de tomber en panne durant la période de garantie est égale à 0,15.
   La probabilité pour qu'exactement 9 appareils soient en parfait état de marche à l'issue de la période de garantie est égale à :
   A : 0,35 à 10^{-2} près**B :** $0,85^9$ **C :** $0,85^9 \times 0,15$ **D :** $0,85^9 \times 0,15 \times 10$

Exercice 4. Pour aller plus loin

Prouvons que l'espérance d'une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres n,p est $\mathbb{E}(X) = np$:

1. Soit f définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = (px + (1-p))^n$. Pour x réel, développer $f(x)$.
2. Calculer $f'(1)$ de deux manières différentes et conclure.