Feuille d'exercices 28 -04-05-12-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

Exercice 1. Amérique du Sud novembre 2010

Le but de l'exercice est de donner un encadrement du nombre I défini par :

$$I = \int_0^1 \frac{x^2 \mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x}$.

1. Étudier les variations de f sur $[0\,;\,1]$.
2. On pose, pour tout entier naturel $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{5}\right)$.
   (a) Justifier que pour tout entier k compris entre 0 et 4, on a :
   $$\frac{1}{5} f\left(\frac{k}{5}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{5} f\left(\frac{k+1}{5}\right)$$
   Interpréter graphiquement à l'aide de rectangles les inégalités précédentes.
   (b) En déduire que : $\dfrac{1}{5} S_4 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{5}\left(S_5 - 1\right)$.
   (c) Donner des valeurs approchées à 10^{-4} près de S_4 et de S_5 respectivement.
   En déduire l'encadrement : $1,091 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant 1,164$.
3. (a) Démontrer que pour tout réel x de $[0\,;\,1]$, on a : $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{1+x}$.
   (b) Justifier l'égalité $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x + I$.
   (c) Calculer $\displaystyle\int_0^1 (1-x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.
   (d) En déduire un encadrement de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x$ d'amplitude strictement inférieure à 10^{-1}.