Feuille d'exercices 24 -28-03-12-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

Exercice 1. Antilles-Guyane juin 2006

Partie A

On considère les suites de points A_n et B_n définies pour tout entier naturel n de la manière suivante : sur un axe orienté $(O\ ;\ \vec{u})$ donné en annexe, le point A_0 a pour abscisse 0 et le point B_0 a pour abscisse 12.

Le point A_{n+1} est le barycentre des points $(A_n, 2)$ et $(B_n, 1)$, le point B_{n+1} est le barycentre des points pondérés $(A_n, 1)$ et $(B_n, 3)$.

1. Sur le graphique placer les points A_2, B_2.
2. On définit les suites (a_n) et (b_n) des abscisses respectives des points A_n et B_n. Montrer : $a_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{3}$.

   On admet de même que $b_{n+1} = \dfrac{a_n + 3b_n}{4}$.

Partie B

1. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = b_n - a_n$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est géométrique. En préciser la raison.
   (b) Donner l'expression de u_n en fonction de l'entier naturel n.
   (c) Déterminer la limite de (u_n). Interpréter géométriquement ce résultat.
2. (a) Démontrer que la suite (a_n) est croissante (on pourra utiliser le signe de u_n).
   (b) Étudier les variations de la suite (b_n).
3. Que peut-on déduire des résultats précédents quand à la convergence des suites (a_n) et (b_n) ?

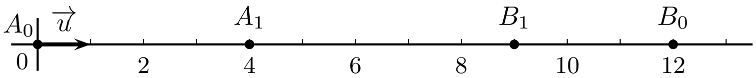
Partie C

1. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par

$$v_n = 3a_n + 4b_n.$$

   Montrer que la suite (v_n) est constante.
2. Déterminer la limite des suites (a_n) et (b_n).

Annexe 3



Exercice 2. Pondichery avril 2006

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 5 cm.

On pose $z_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2} z_n$. On note A_n le point du plan d'affixe z_n.

1. Calculer $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$ et vérifier que z_4 est un nombre réel.
   Placer les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 sur une figure.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.
   Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

3. À partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre O et de rayon 0,1 ?
4. (a) Établir que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = \mathrm{i}$.
   En déduire la nature du triangle $\mathrm{O}A_nA_{n+1}$.
   (b) Pour tout entier naturel n, on note ℓ_n la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$.
   On a ainsi : $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$.
   Exprimer ℓ_n en fonction de n. Quelle est la limite de la suite (ℓ_n) ?