Feuille d'exercices 19 -16-02-12-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

Exercice 1. Métropole septembre 2008

Dans une kermesse un organisateur de jeux dispose de 2 roues de 20 cases chacune.
La roue A comporte 18 cases noires et 2 cases rouges.
La roue B comporte 16 cases noires et 4 cases rouges.
Lors du lancer d'une roue toutes les cases ont la même probabilité d'être obtenues.
La règle du jeu est la suivante :

- Le joueur mise 1 € et lance la roue A.
- S'il obtient une case rouge, alors il lance la roue B, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.
- S'il obtient une case noire, alors il relance la roue A, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Soient E et F les évènements :
   E : « à l'issue de la partie, les 2 cases obtenues sont rouges »
   F : « à l'issue de la partie, une seule des deux cases est rouge ».
   Montrer que $p(\mathrm{E}) = 0,02$ et $p(\mathrm{F}) = 0,17$.
3. Si les 2 cases obtenues sont rouges le joueur reçoit 10 € ; si une seule des cases est rouge le joueur reçoit 2 € ; sinon il ne reçoit rien.
   X désigne la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros du joueur (rappel le joueur mise 1 €).
   (a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   (b) Calculer l'espérance mathématique de X et en donner une interprétation.
4. Le joueur décide de jouer n parties consécutives et indépendantes (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2)
   (a) Démontrer que la probabilité p_n qu'il lance au moins une fois la roue B est telle que $p_n = 1 - (0,9)^n$.
   (b) Justifier que la suite de terme général p_n est convergente et préciser sa limite.
   (c) Quelle est la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $p_n > 0,9$?

Exercice 2. Asie juin 2010

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.

Lorsque le n-ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.
L'évènement : « le n-ième sondage est positif » est noté V_n, on note p_n la probabilité de l'évènement V_n.

L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à $0,6$ d'être aussi positif ;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à $0,9$ d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire : $p_1 = 1$.

1. Calculer les probabilités des évènements suivants :
   (a) A : « les 2^{e} et 3^{e} sondages sont positifs » ;
   (b) B : « les 2^{e} et 3^{e} sondages sont négatifs ».
2. Calculer la probabilité p_3 pour que le 3^{e} sondage soit positif.
3. n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. Représenter par un arbre pondéré la situation des sondages n et $n + 1$.
4. Pour tout entier naturel n non nul, établir que : $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,1$.
5. On note u la suite définie, pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - 0,2$.
   (a) Démontrer que u est une suite géométrique, en préciser le premier terme et la raison.
   (b) Exprimer p_n en fonction de n.
   (c) Calculer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la probabilité p_n.