Feuille d'exercices 18 -07-02-12-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

Exercice 1. Asie juin 2007

On désigne par a un réel strictement positif et différent de 1.
On se propose de rechercher, dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, les solutions de l'équation E_a : $x^a = a^x$.

I Étude de quelques cas particuliers

1. Vérifier que les nombres 2 et 4 sont solutions de l'équation E_2.
2. Vérifier que le nombre a est toujours solution de l'équation E_a.
3. On se propose de démontrer que e est la seule solution de l'équation E_{e}.
   On note h la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = x - \mathrm{e}\ln x$.
   (a) **Question de cours :** On rappelle que lorsque t tend vers $+\infty$, alors $\dfrac{\mathrm{e}^t}{t}$ tend vers $+\infty$.
   Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.
   (b) Déterminer les limites de h en 0 et $+\infty$.
   (c) Étudier les variations de h sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   (d) Dresser le tableau des variations de h et conclure quant aux solutions de l'équation E_{e}.

II Résolution de l'équation E_a

1. Soit x un réel strictement positif. Montrer que x est solution de l'équation E_a si et seulement si x est solution de l'équation : $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln a}{a}$.
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.
   (a) Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$. Donner une interprétation graphique de ces deux limites.
   (b) Étudier les variations de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   (c) Dresser le tableau des variations de la fonction f.
   (d) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. (Unité : 2 cm).
3. Justifier à l'aide des résultats précédents les propositions (P_1) et (P_2) suivantes :
   (P_1) : si $a \in]0\ ;\ 1]$, alors E_a admet l'unique solution a ;
   (P_2) : si $a \in]1\ ;\ \mathrm{e}[\cup]\mathrm{e}\ ;\ +\infty[$, alors E_a admet deux solutions a et b, l'une appartenant à l'intervalle $]1\ ;\ \mathrm{e}[$ et l'autre appartenant à l'intervalle $]\mathrm{e}\ ;\ +\infty[$.

Exercice 2. Selon Amétrique du sud novembre 2006

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, on considère la fonction f_n définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f_n(x) = \ln x + \dfrac{x}{n} - 1$.
   (a) Déterminer les limites de f_n en 0 et en $+\infty$ puis étudier le sens de variations de f_n.
   (b) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0\ ;\ +\infty[$. On note α_n cette solution. Montrer qu'elle appartient à l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$.
2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On note (Γ) la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.
   (a) Soit n un entier naturel non nul. Déterminer une équation de la droite Δ_n passant par le point A de coordonnées $(0\,;\,1)$ et le point B_n de coordonnées $(n\ ;\ 0)$.
   (b) Faire un croquis représentant la courbe (Γ) et les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3.
   (c) Montrer que α_n est l'abscisse du point d'intersection de (Γ) avec Δ_n.
   (d) Préciser la valeur de α_1 puis faire une conjecture sur le sens de variation de la suite (α_n).
3. (a) Exprimer $\ln(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n.
   (b) Exprimer $f_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n et vérifier que : $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$.
   (c) Déduire de la question précédente le sens de variation de la suite (α_n).
   (d) Montrer que la suite (α_n) converge. On note ℓ sa limite. Établir que : $\ln \ell = 1$ et en déduire ℓ.