FEUILLE D'EXERCICES 17 -02-02-12-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

EXERCICE 1. Amérique du Sud novembre 2008 : 3 points

Dans cet exercice, on demande aux candidats d'établir, en suivant la démarche proposée, deux résultats de cours.

On rappelle que la fonction ln est définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, positive sur $[1\ ;\ +\infty[$, et vérifie :

$$\begin{cases} \ln 1 = 0 \\ \text{Pour tous réels strictement positifs } x \text{ et } y, \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y \\ \text{Pour tout réel strictement positif} x, \ [\ln(x)]' = \dfrac{1}{x} \\ \ln(2) \approx 0,69 \text{ à } 10^{-2} \text{ près} \end{cases}$$

1. On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par
$$f(x) = \sqrt{x} - \ln x.$$
   (a) Étudier les variations de f et en déduire que f admet un minimum sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   (b) En déduire le signe de f puis que, pour tout $x > 1$, $0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{\sqrt{x}}{x}$.
   (c) En déduire que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.
2. Soit n un entier naturel non nul.
   On considère la fonction f_n définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :
$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{n}}}.$$
   En utilisant la question 1., déterminer, si elle existe, la limite en $+\infty$ de la fonction f_n.

EXERCICE 2. Polynésie juin 2011

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Soient A le point d'affixe $2 - 5\mathrm{i}$ et B le point d'affixe $7 - 3\mathrm{i}$.
   Proposition 1 : Le triangle OAB est rectangle isocèle.
2. Soit (Δ) l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z - \mathrm{i}| = |z + 2\mathrm{i}|$.
   Proposition 2 : (Δ) est une droite parallèle à l'axe des réels.
3. Soit $z = 3 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.
   Proposition 3 : Pour tout entier naturel n non nul, z^{3n} est imaginaire pur.
4. Soit z un nombre complexe non nul.
   Proposition 4 : Si $\dfrac{\pi}{2}$ est un argument de z alors $|\mathrm{i} + z| = 1 + |z|$.
5. Soit z un nombre complexe non nul.
   Proposition 5 : Si le module de z est égal à 1 alors $z^2 + \dfrac{1}{z^2}$ est un nombre réel.