Feuille d'exercices 16 : Métropole sept. 2011 -31-01-12-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

Partie A - Étude du signe d'une fonction

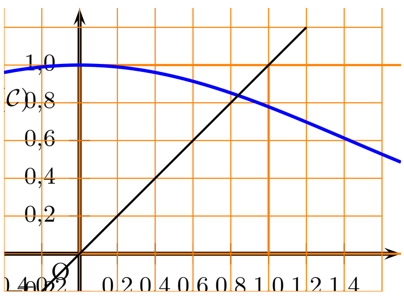
On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x^2 + 4\ln x$.

1. Déterminer le tableau de variation de la fonction f en précisant les limites en 0 et $+\infty$.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α et une seule dans $]0\ ;\ +\infty[$.
3. En déduire le signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel strictement positif x.

Partie B - Une valeur approchée du réel α défini dans la partie A

Sur le graphique fourni ci-dessous, on a tracé une partie de la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}$. On définit la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 & = & 0,5 \\ u_{n+1} & = & g(u_n)\ \forall\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

1. Vérifier que α est l'unique solution de l'équation $g(x) = x$.
2. Au moyen de la courbe $(\mathcal{C})$ et de la droite d'équation $y = x$, représenter les termes u_1, u_2 et u_3 de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.
   Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) ?
3. On admet que pour tout entier naturel n, $\quad u_{2n} \leqslant \alpha \leqslant u_{2n+1}$.
   En utilisant la calculatrice, déterminer le plus petit entier n pour lequel les trois premières décimales de u_n et u_{n+1} sont identiques. En déduire que $0,838$ approche α à 10^{-3} près.



Partie C - Un problème de distance

On appelle (Γ) la courbe représentative, dans un repère orthonormal, de la fonction φ définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $\varphi(x) = 2\ln x$.

L'objectif de cette partie est de démontrer que parmi les points de la courbe (Γ), il y en a un et un seul qui est plus proche de l'origine O que tous les autres.

1. Soient M un point de la courbe (Γ) et x son abscisse. Exprimer OM en fonction de x.
2. (a) Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = x^2 + 4(\ln x)^2$.
   Étudier les variations de la fonction h. On pourra utiliser la partie A.
   (b) En déduire qu'il existe un unique point A de la courbe (Γ) tel que pour tout point M de (Γ), distinct de A, on ait O$M >$ OA.
3. Démontrer que la droite (OA) est perpendiculaire à la tangente $\mathrm{T_A}$ à la courbe (Γ) au point A.