Feuille d'exercices 15 : Logarithme Néperien -25-01-12-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

L'exponentielle est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et : $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$; $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. D'après le théorème de la bijection, pour tout $y > 0$, l'équation $e^x = y$ admet une unique solution que l'on note $\ln(y)$.

La fonction *logarithme néperien*, notée ln est la fonction réciproque de la fonction exponentielle : elle est définie sur $]0;+\infty[$ et vérifie : $e^{\ln(x)} = x$ pour tout $x > 0$.

Exercice 1. Propriétés algébriques

1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$. (montrer l'égalité de l'exponentielle de chacun des membres et conclure).
2. Calculer $\ln(1)$ et $\ln(e)$.
3. Démontrer que pour tous $x, y > 0$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$. (même méthode qu'en 1)
4. En déduire : $x, y > 0$, $\ln(1/x) = -\ln(x)$ et $\ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y)$.
5. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(x^n) = n\ln(x)$.

Exercice 2. Dérivabilité

1. Rappeler la valeur de $\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}$.
2. Démontrer que pour tout $h \in]-1;+\infty[$, $\frac{\ln(1+h)}{h} = \frac{\ln(1+h)}{e^{\ln(1+h)} - 1}$.
3. Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer que $\ln(1+h) \in]-\varepsilon;\varepsilon[\iff h \in]e^{-\varepsilon} - 1; e^{\varepsilon} - 1[$. En conclure que ln est continue en 1.
4. En déduire que ln est dérivable en 1 et déterminer $\ln'(1)$. (limite de fonction composée)
5. Démontrer que pour tout $x > 0$ et tout $h \in]-x,+\infty[$, $\frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \frac{1}{x} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}$.
6. En conclure que ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.
7. Quel est le sens de variations de ln ?
8. Si $u : I \to]0;+\infty[$ est dérivable, montrer que $\ln(u)$ est dérivable et calculer sa dérivée.

Exercice 3. Limites et croissances comparées

1. Rappeler la définition de $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$. En déduire cette limite.
2. En posant $X = 1/x$, en déduire $\lim_{x\to 0} \ln(x)$.
3. Rappeler $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}$. En déduire $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}$. (poser $X = \ln(x)$).
4. Calculer $\lim_{x\to 0} x\ln(x)$.
5. Déduire de ce qui précède : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\ln(x)}$.