

FEUILLE D'EXERCICES 14 : COMPLEXES -24-01-12-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

EXERCICE 1. Métropole juin 2002

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 4 cm. On note A et B les points d'affixes respectives 1 et i . à tout point M , distinct de A et d'affixe z , est associé le point M' d'affixe Z définie par :

$$Z = \frac{(1 - i)(z - i)}{z - 1}.$$

1. (a) Calculer l'affixe du point C' associé au point C d'affixe $-i$.
(b) Placer les points A, B et C.
2. Soit $z = x + iy$ où x et y désignent deux nombres réels.
 - (a) Mettre Z sous forme algébrique. (question changée)
 - (b) Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z telle que Z soit réel.
 - (c) Déterminer l'ensemble F des points M d'affixe z telle que $\text{Re}(Z)$ soit négatif ou nul.
 - (d) Déterminer l'ensemble G des points M d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur. (question ajoutée)
3. (a) Écrire le nombre complexe $(1 - i)$ sous forme trigonométrique.
(b) Soit M un point d'affixe z , distinct de A et de B. Montrer que :

$$\frac{(1 - i)(z - i)}{z - 1} \in \mathbb{R}^* \text{ si et seulement s'il existe un entier } k \text{ tel que}$$

$$\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \right) = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$
 - (c) En déduire l'ensemble des points M vérifiant $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \right) = \frac{\pi}{4} + k\pi$.
 - (d) Déterminer l'ensemble des points M vérifiant $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$.

EXERCICE 2. Une spirale

Soit (z_n) la suite définie par $z_0 = 1$ et $z_{n+1} = \frac{3}{4}iz_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. On note A_n le point d'affixe z_n .

1. Montrer que A_{n+1} est l'image de A_n par la composée de deux transformations géométriques que l'on précisera.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = OA_n$. Montrer que (r_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = A_nA_{n+1}$. Montrer que (r_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison. En déduire la longueur de la spirale (ligne polygonale) $A_0A_1\dots A_n$ puis celle de la spirale infinie $A_0A_1\dots A_n\dots$