Feuille d'exercices 14 : Complexes -24-01-12-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

Exercice 1. Métropole juin 2002

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 4 cm. On note A et B les points d'affixes respectives 1 et i. à tout point M, distinct de A et d'affixe z, est associé le point M' d'affixe Z définie par :

$$Z = \frac{(1-\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}{z-1}.$$

1. (a) Calculer l'affixe du point C′ associé au point C d'affixe $-\mathrm{i}$.
   (b) Placer les points A, B et C.
2. Soit $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y désignent deux nombres réels.
   (a) Mettre Z sous forme algébrique. (question changée)
   (b) Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z telle que Z soit réel.
   (c) Déterminer l'ensemble F des points M d'affixe z telle que $\mathrm{Re}(Z)$ soit négatif ou nul.
   (d) Déterminer l'ensemble G des points M d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur. (question ajoutée)
3. (a) Écrire le nombre complexe $(1-\mathrm{i})$ sous forme trigonométrique.
   (b) Soit M un point d'affixe z, distinct de A et de B. Montrer que :
   $\dfrac{(1-\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}{z-1} \in \mathbb{R}*$ si et seulement s'il existe un entier k tel que
   $\left(\overrightarrow{M\mathrm{A}},\ \overrightarrow{M\mathrm{B}}\right) = \dfrac{\pi}{4} + k\pi.$
   (c) En déduire l'ensemble des points M vérifiant $\left(\overrightarrow{M\mathrm{A}},\ \overrightarrow{M\mathrm{B}}\right) = \dfrac{\pi}{4} + k\pi.$
   (d) Déterminer l'ensemble des points M vérifiant $\left(\overrightarrow{M\mathrm{A}},\ \overrightarrow{M\mathrm{B}}\right) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi.$

Exercice 2. Une spirale

Soit (z_n) la suite définie par $z_0 = 1$ et $z_{n+1} = \frac{3}{4}iz_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. On note A_n le point d'affixe z_n.

1. Montrer que A_{n+1} est l'image de A_n par la composée de deux transformations géométriques que l'on précisera.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = OA_n$. Montrer que (r_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = A_nA_{n+1}$. Montrer que (r_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison. En déduire la longueur de la spirale (ligne polygonale) $A_0A_1...A_n$ puis celle de la spirale infinie $A_0A_1...A_n....$