Feuille d'exercices 13 : Complexes -18-01-12-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

Exercice 1. Nouvelle Calédonie 2009

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm. On considère les points A et B d' affixes respectives $z_{\text{A}} = 1$ et $z_{\text{B}} = 3+4\text{i}$.
Soit C et D les points d'affixes respectives $z_{\text{C}} = 2\sqrt{3}+\text{i}(-2-\sqrt{3})$ et $z_{\text{D}} = -2\sqrt{3}+\text{i}(-2+\sqrt{3})$.
L'objet de l'exercice est de proposer une construction géométrique des points D et C.

1. (a) Montrer que l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ est D.
   (b) En déduire que les points B et D sont sur un cercle $\mathcal{C}$ de centre A dont on déterminera le rayon.
2. Soit F, l'image du point A par l'homothétie de centre B et de rapport $\dfrac{3}{2}$.
   (a) Montrer que l'affixe z_{F} du point F est -2i.
   (b) Montrer que le point F est le milieu du segment [CD].
   (c) Montrer que $\dfrac{z_{\text{C}} - z_{\text{F}}}{z_{\text{A}} - z_{\text{F}}} = -\text{i}\sqrt{3}$. En déduire la forme exponentielle de $\dfrac{z_{\text{C}} - z_{\text{F}}}{z_{\text{A}} - z_{\text{F}}}$.
   Déduire des questions précédentes que la droite (AF) est la médiatrice du segment [CD].
3. Proposer un programme de construction pour les points D et C à partir des points A, B et F et réaliser la figure. *Dans cette question, toute trace de recherche,...*

Exercice 2. Liban juin 2003

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $4z^2 - 12z + 153 = 0$.
2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, d'unité graphique 1 cm on considère les points A, B, C, P d'affixes respectives :
   $z_{\text{A}} = \dfrac{3}{2}+6\text{i}$, $z_{\text{B}} = \dfrac{3}{2}-6\text{i}$; $z_{\text{C}} = -3-\dfrac{1}{4}\text{i}$, $z_{\text{P}} = 3+2\text{i}$ et le vecteur $\overrightarrow{w}$ d'affixe $z_{\overrightarrow{w}} = -1+\dfrac{5}{2}\text{i}$.
   (a) Déterminer l'affixe z_{Q} du point Q, image du point B dans la translation t de vecteur $\overrightarrow{w}$.
   (b) Déterminer l'affixe z_{R} du point R, image du point P par l'homothétie h de centre C et de rapport $-\dfrac{1}{3}$.
   (c) Déterminer l'affixe z_{S} du point S, image du point P par la rotation r de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
   Placer les points P, Q, R et S.
3. (a) Démontrer que le quadrilatère PQRS est un parallélogramme.
   (b) Calculer $\dfrac{z_{\text{R}} - z_{\text{Q}}}{z_{\text{P}} - z_{\text{Q}}}$.
   En déduire la nature précise du parallélogramme PQRS.
   (c) Justifier que les points P, Q, R et S appartiennent à un même cercle, noté $\mathcal{C}$. On calculera l'affixe de son centre Ω et son rayon ρ.
4. La droite (AP) est-elle tangente au cercle $\mathcal{C}$?