Feuille d'exercices 12 : Complexes -10-01-12-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

Exercice 1. France 2008

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$(unité graphique : 1 cm).

Soient A, B et I les points d'affixes respectives $1+\mathrm{i}$, $3-\mathrm{i}$ et 2.

À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z'=z^2-4z$. Le point M' est appelé l'image de M.

1. Faire une figure et compléter cette figure tout au long de l'exercice.
2. Calculer les affixes des points A′ et B′, images respectives des points A et B. Remarques ?
3. Déterminer les points qui ont pour image le point d'affixe -5.
4. (a) Vérifier que pour tout nombre complexe z, on a : $z'+4=(z-2)^2$.
   (b) En déduire une relation entre $|z'+4|$ et $|z-2|$ et, lorsque z est différent de 2, une relation entre $\arg(z'+4)$ et $\arg\,(z-2)$,
   (c) Que peut-on dire du point M' lorsque M décrit le cercle $\mathcal{C}$ de centre I et de rayon 2 ?
5. Soient E le point d'affixe $2+2(\cos(\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{3}))$, J le point d'affixe -4 et E′ l'image de E.
   (a) Calculer la distance IE et une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{u}\ ;\overrightarrow{\mathrm{IE}}\right)$.
   (b) Calculer la distance JE′ et une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{u}\ ;\overrightarrow{\mathrm{JE'}}\right)$.
   (c) Construire E′ à la règle et au compas ; laisser apparents les traits de construction.

Exercice 2. France 2009

Dans le plan complexe muni d'un repère orthononnal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on associe à tout point M d'affixe z non nulle, le point M' milieu du segment $[MM_1]$ où M_1 est le point d'affixe $\dfrac{1}{z}$.

Le point M' est appelé l'image du point M.

1. (a) Montrer que les distances OM et OM_1 vérifient la relation $\mathrm{O}M\times\mathrm{O}M_1=1$ et que les angles $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{O}M_1}\right)$ et $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{O}M}\right)$ vérifient l'égalité des mesures suivantes $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{O}M_1}\right)=-\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{O}M}\right)$ à 2π près.
   (b) Faire une figure avec un point A appartenant au cercle de centre O et de rayon 2. Construire le point A′ image du point A. (Laisser les traits de construction).
2. (a) Justifier que pour $z\in\mathbb{C}$ non nul, le point M' a pour affixe $z'=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$.
   (b) Soient B et C les points d'affixes respectives 2i et −2i. Calculer les affixes des points B′ et C′ images respectives des points B et C.
   (c) Placer les points B, C, B′ et C′ sur la figure.
3. Déterminer l'ensemble des points M tels que $M'=M$.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Montrer que si le point M appartient au cercle de centre O et de rayon 1 alors son image M' appartient au segment [KL] où K et L sont les points d'affixes respectives −1 et 1.