

FEUILLE D'EXERCICES 11 : MÉTHODE DE CARDANO -05-01-12-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

Contexte : résoudre les équations de degré 3 : $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$), au début du 16ème, en Italie.

EXERCICE 1. Rappels et résultats préliminaires

1. Montrer que $(u + v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v)$.
2. Développer $(x - a)(x - b)$. En déduire que les solutions du système : $\begin{cases} a + b = S \\ ab = P \end{cases}$ sont les solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$.

EXERCICE 2. Simplification du problème

1. Expliquer pourquoi on peut se contenter de traiter le cas $a = 1$ et résoudre $x^3 + b'x^2 + c'x + d' = 0$ (*)
2. En posant $x = X - \frac{b'}{3}$ dans (*), montrer qu'il suffit de s'intéresser à la résolution des équations du type $X^3 - pX - q = 0$ (**), où p et q sont à déterminer en fonction de b' , c' et d' .

EXERCICE 3. Etude de la fonction $f : x \mapsto x^3 - px - q$

★ le cas $p \leq 0$

Calculer la dérivée de f et en déduire que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution sur \mathbb{R} .

★ le cas $p > 0$

1. Dresser le tableau de variation de f et calculer les valeurs exactes des 2 extrema locaux, en fonction de p et q , ainsi que le produit de ces deux extrema.
2. En déduire le nombre de solution de l'équation $f(x) = 0$ en fonction du signe de $D = 27q^2 - 4p^3$.

EXERCICE 4. La méthode dite de Cardan(o)

★ du degré 3 vers le degré 2

1. Montrer que si $u^3 + v^3 = q$ et $uv = \frac{p}{3}$, alors $u + v$ est solution de (**).
2. En déduire que u^3 et v^3 sont solutions de l'équation $X^2 - qX + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$
3. Calculer Δ et commenter.

★ Le cas $D > 0$ Donner l'unique solution de (**).

EXERCICE 5. Le cas $D < 0$: le génie de Bombelli

Remarque : Dans le cas où $D < 0$, la méthode de Cardan semble être une impasse. Pour comprendre sa méthode et ses idées, considérons le cas historique suivant : $x^3 - 15x - 4 = 0$ (***), c'est à dire avec $p = 15$ et $q = 4$.

1. Calculer $\frac{D}{27}$ et donner son signe.
2. En introduisant, comme Bombelli, le nombre (imaginaire...) $i = \sqrt{-1}$ (la notation i est due à Euler bien plus tard), calculer en fonction de i la solution obtenue par la méthode dite de Cardan.
3. Développer les quantités $(2 + i)^3$ et $(2 - i)^3$. Conclure.
4. Résoudre complètement (***).

Et après ? Ferrari, un élève de Cardano, trouve ensuite une méthode pour résoudre les équations de degré 4 vers 1540. Galois, en 1831, démontre notamment qu'il est impossible de résoudre les équations de degré supérieur de manière exacte en général.