Feuille d'exercices 10 -16-12-11-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

Exercice 1. Introduction aux nombres complexes

1. Comment compléter l'assertion suivante pour qu'elle ait un sens : « $x^2 \geq 0$ » ?
2. Taper i^2 ([2nde]+[.]) à la calculatrice. Qu'observe-t-on ?

> On introduit un nombre imaginaire noté i tel que $i^2 = -1$. On note $\mathbb{C}$ et on appelle ensemble des nombres complexes l'ensemble des nombres de la forme $a+ib$ où $a, b \in \mathbb{R}$. On admet que les opérations usuelles des réels s'étendent aux nombres complexes.

3. Développer (sans calculatrice) $(1+i)^2$, $(2+i)(2-i)$ et $i(1+i)$.
4. On appelle forme algébrique d'un nombre $z \in \mathbb{C}$ son écriture sous la forme $z = a + ib$ où $a, b \in \mathbb{R}$. Mettre $z = \frac{2+i}{1-i}$ sous forme algébrique.
5. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $(-2+3i)z = i$.
6. Factoriser dans $\mathbb{C}$: $z^2 + 4$.

Exercice 2. Nombres complexes et géométrie

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. À tout nombre complexe $z = a + ib$ on associe un unique point du plan $M(a; b)$. On dit que z est l'affixe de M.

1. Si $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, a est la partie réelle de z. Quel est l'ensemble des points du plan dont les affixes ont une partie réelle nulle ? Ces nombres sont les imaginaires purs.
2. Si $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, b est la partie imaginaire de z. Quel est l'ensemble des points du plan dont les affixes ont une partie imaginaire nulle ? Ces nombres sont les réels !
3. Le conjugué de $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ est le nombre $\bar{z} = a - ib$. Soit S la transformation du plan qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $\bar{z}$. Identifier cette transformation.
4. Le module de $z = a + ib \in \mathbb{C}$ est $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Interpréter $|z|$ en terme de distance. Exprimer $\Re e(z)$, $\Im m(z)$ et $|z|^2$ en fonction de z et $\bar{z}$
5. Soient $\vec{w}$ et $\vec{w}'$ deux vecteurs d'affixes respectives $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$. Montrer que $\Re e(z/z') = (\vec{w} \cdot \vec{w}')|z/z'|$ et en déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $\vec{w}$ et $\vec{w}'$ soient orthogonaux.
6. Quelle est l'affixe du milieu de $M(z)$ et $M'(z')$? Quelle est l'affixe du barycentre de $M_1(z_1), ..., M_n(z_n)$?

Exercice 3. Trinômes

Soit $az^2 + bz + c$ un trinôme à coefficients a, b, c réels (et $a \neq 0$).
Mettre le trinôme sous forme canonique. Dans le cas où $\Delta < 0$, factoriser dans $\mathbb{C}$ et en déduire que le trinôme admet deux racines complexes conjuguées.