Devoir maison 9 : pour le -16-11-11-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

Exercice 1. Irrationalité de e

Pour tout entier $n \geq 2$, la *factorielle* de n est le nombre définit par $n! = 1 \times 2 \times ... \times (n-1) \times n$. Par convention, on note $0! = 1! = 1$.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!}$ pour tout $n \geq 1$.

1. Calculer $n!$ pour tout entier naturel $n \leq 5$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, simplifier $\frac{n+1}{(n+1)!}$.
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $n! \geq n$.
3. Calculer les cinq premiers termes de (u_n) ainsi que v_5.
4. Montrer que les suites (v_n) et (u_n) sont adjacentes. On admet que leur limite commune est le nombre e.
5. À partir de quel n a-t-on $v_n - u_n < 10^{-8}$? En déduire une valeur approchée de e à 10^{-8}.
6. On suppose que $e = \frac{p}{q}$ avec p et q deux entiers naturels non nuls. Pourquoi peut-on dire que $u_q < e < u_q + \frac{1}{q!}$? En déduire $q!u_q < (q-1)!p < q!u_q + 1$. Expliquer pourquoi $q!u_q \in \mathbb{N}$ et conclure à une contradicton, qui montre que e est irrationnel.

Exercice 2. Composée d'une exponentielle et d'un trinôme

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2+2x+3}$

1. Rappeler la valeur de e^0. Résoudre $f(x) = 1$.
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Étudier les variations de f.

Exercice 3. Composée d'un trinôme et d'une exponentielle

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -e^{2x} + 2e^x + 3$.

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2e^x(1 - e^x)$.
3. Étudier les variations de g.