DEVOIR MAISON 7 : POUR LE -04-11-11-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

EXERCICE 1. MÉTHODE DE HÉRON. APPROXIMATION DE RACINES CARRÉES

Soit $a \geq 1$ un nombre réel. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{u_n} + u_n\right)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [\sqrt{a}, a]$.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante. Qu'en déduire ?
3. Montrer que la limite ℓ de (u_n) vérifie $\ell = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\ell} + \ell\right)$. En déduire ℓ.
4. Vitesse de convergence.
   Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - \sqrt{a}$. (v_n mesure l'écart entre u_n et $\sqrt{a}$).
   Dans cette partie, on suppose que $a = 2$.
   (a) Montrer que $v_{n+1} = \frac{v_n^2}{2u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Prouver par récurrence que $v_n \leq \frac{1}{2^{2^n}}$ pour tout entier $n \geq 1$
   (c) Majorer l'écart entre u_3 et $\sqrt{2}$ par une puissance de 10.
   (d) À partir de quel n peut-on dire que u_n approche $\sqrt{2}$ avec au moins 1000 décimales exactes ? ($v_n < 10^{-1000}$)

EXERCICE 2. SUITE DE FIBONACCI

Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1. Limite et variations de $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) Montrer par récurrence la propriété suivante pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathcal{P}(n)$: $F_n \geq n$ et $F_{n+1} \geq n+1$.
   (b) En déduire la limite et le sens de variation de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Limite de F_{n+1}/F_n
   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$. On définit également les suites (v_n) et (w_n) par $v_n = u_{2n}$ $w_n = u_{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(-1)^n}{F_n F_{n+1}}$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = 0$, ainsi que le sens de variations de la suite (w_n) et celui de la suite (v_n).
   (c) Montrer que les suites (w_n) et (v_n) sont adjacentes. En déduire que (u_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.
   (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$. En déduire la valeur de ℓ.