Devoir maison 5 : pour le -12-10-11-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{|-4x^2+2x+2|}$ et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

1. Expliquer pourquoi f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier le signe de $-2x^2+x+1$ en fonction des valeurs de $x \in \mathbb{R}$. En déduire une expression de f sans valeur absolue pour $x \in]-0,5;1[$ et une expression de f sans valeur absolue pour $x \in]-\infty;-0,5[\cup]1;+\infty[$.
3. Montrer que $\mathcal{C}$ admet la droite $\mathcal{A}$ d'équation $x = \frac{1}{4}$ comme axe de symétrie.
4. Montrer que la droite Δ_+ d'équation $y = 2x - 0,5$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
5. En déduire l'existence d'une asymptote Δ_- à $\mathcal{C}$ en $-\infty$. Donner une équation de Δ_-.
6. Montrer que f n'est pas dérivable en 1. Interpréter géométriquement le résultat.
7. Montrer que f est dérivable sur $[0,25;1[\cup]1;+\infty[$. Calculer sa dérivée sur chacun de ces intervalles (on pourra faire deux calculs distincts).
8. Dresser le tableau de variations complet de f.
9. Représenter les asymptotes, les tangentes horizontales et verticales de $\mathcal{C}$ ainsi que $\mathcal{C}$.

Exercice 2.

Dans le plan, on considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O. On considère également ABC un triangle direct[1] isocèle en A, et inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$. On note H le pied de la hauteur issue de A.
On munit le plan d'un repère orthonormé direct[2] $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, tel que $\vec{\imath} = \overrightarrow{OA}$.
On note $[r,\alpha]$ les coordonnées polaires de B, ou la mesure α est exprimée en radians, dans l'intervalle $[0;2\pi[$.
Enfin, $\mathcal{A}(\alpha)$ désigne l'aire (en unités d'aires) de ABC en fonction de α.

1. Que vaut r ? Expliquer pourquoi $\alpha \in [0;\pi]$.
2. Déterminer les coordonnées cartésiennes de B, C et H en fonction de α.
3. Montrer que pour $\alpha \in [0;\pi]$, $\mathcal{A}(\alpha) = \sin(\alpha)(1-\cos(\alpha))$
4. Montrer que f est dérivable sur $[0;\pi]$ et que
$$\text{pour tout } \alpha \in [0;\pi],\ f'(\alpha) = -2\cos^2(\alpha) + \cos(\alpha) + 1$$
5. Factoriser le trinôme $-2X^2+X+1$.
6. Résoudre $\cos(\alpha) + \dfrac{1}{2} = 0$ et $\cos(\alpha) - 1 = 0$ sur $[0;\pi]$.
7. En déduire le signe de $\mathcal{A}'(\alpha)$ puis le tableau de variations de $\mathcal{A}$.
8. Quelle est la nature de ABC lorsque l'aire $\mathcal{A}$ est maximale ?

1. dont les sommets A, B et C sont étiquetés dans le sens trigonométrique
2. c'est-à-dire tel que $(\vec{\imath},\vec{\jmath}) = \dfrac{\pi}{2} \mod 2\pi$