Devoir maison 4 : pour le -05-10-11-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 1 cm.

1. Ensemble de définition et relation fonctionnelle.
   (a) Montrer que f est définie sur l'ensemble des réels.
   (b) Montrer que pour tout x réel, $f(x)f(-x) = 1$.
2. Comportement asymptotique
   (a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
   (b) Calculer à partir [1] de 1.b et 2.a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. En déduire l'existence d'une asymptote $T_{+\infty}$ à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
   (c) Montrer que la droite $T_{-\infty}$ d'équation $y = -2x$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $-\infty$.
3. Variations.
   (a) Montrer que $f(x) > 0$ pour tout $x \leq 0$. En utilisant 1.b, en déduire $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}}$. En déduire le tableau de variations de f.
4. Une propriété des tangentes.
   (a) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, déterminer l'équation réduite de la tangente T_a à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse a.
   (b) Déterminer l'intersection J de $\mathcal{C}$ avec l'axe des ordonnées, ainsi que la position relative de la tangente T_0 à $\mathcal{C}$ en J et de $\mathcal{C}$.
   (c) Pour tout $a > 0$, exprimer en fonction de a les coordonnées du point J_a d'intersection de T_a et de T_{-a}.
   (d) Montrer que l'ensemble de points J_a pour $a > 0$ est le segment $]OJ[$. [2]
5. Représenter $T_{-\infty}$, T_0 et $T_{+\infty}$ ainsi que $\mathcal{C}$.

1. à défaut : calculer directement
2. on pourra procéder par double inclusion en montrant d'abord que tout $J_a \in]OJ[$ puis que tout point de $]OJ[$ est un J_a pour un $a > 0$ que l'on déterminera.