Devoir maison 3 : pour le -28-09-11-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Le taux d'accroissement de f entre $x \in I$ et $x+h \in I$ est le nombre

$$\tau_{x,h}f = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

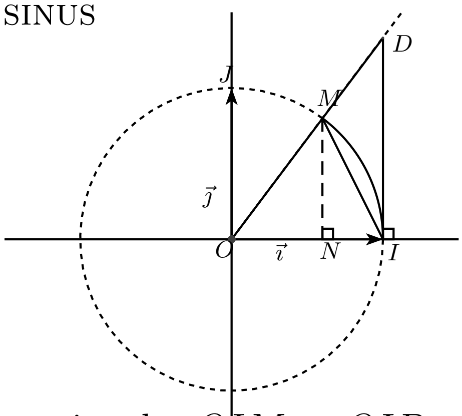
On dit que la fonction f est dérivable en $x \in I$ de dérivée $f'(x)$ si et seulement si la limite $f'(x) = \lim_{h\to 0} \tau_{x,h}f$ existe.

Exercice 1 : dérivées des fonctions usuelles.

Pour chacune des fonctions f suivantes, pour tout x fixé dans son ensemble de définition, calculer $\lim_{h\to 0} \tau_{x,h}f$:

$$f_1 : x \mapsto ax+b,\ (a,b\in\mathbb{R}),\ f_2 : x\mapsto x^2,\ f_3 : x \mapsto \frac{1}{x},\ f_4 : x\mapsto \sqrt{x}$$

Exercice 2 : dérivées du cosinus et du sinus



Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, soient $I(1,0)$, $J(0,1)$, M de coordonnées polaires $[1,x]$ où $0<x<\frac{\pi}{2}$. On définit également N l'intersection de l'axe (OI) et de la perpendiculaire à (OI) passant par M et D l'intersection de (OM) et de la perpendiculaire à (OI) passant par I.

1. Exprimer, en fonction de x, les surfaces des triangles OIM et OID ainsi que celle du secteur angulaire OIM.
2. En déduire : pour tout $x\in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $\sin x < x < \tan x$, puis $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$
3. Calculer $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x}$. Quelle est la parité de $x\mapsto \dfrac{\sin x}{x}$? En déduire $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$.
4. Montrer que pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[-\{0\}$, $\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{1+\cos x}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2$.
   En déduire $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ puis $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x - 1}{x}$
5. Pour tout $x\in\mathbb{R}$ fixé, calculer $\lim_{h\to 0}\tau_{x,h}\cos$ et $\lim_{h\to 0}\tau_{x,h}\sin$. (on pourra utiliser les formules de duplication et la limite précédente).

Exercice 3. (facultatif) Trouver deux fonctions u et v telles que $\lim_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} v(x) = 0$ mais uv n'ait pas de limite.