Devoir Maison 16 : pour le -02-05-12-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

Exercice 1. Loi de Hardy-Weinberg

Certains gènes peuvent avoir exactement deux états : l'allèle A (allèle dominant) ou a (allèle recessif).
Un individu peut avoir, sur une paire de chromosome les génotypes suivants : AA, Aa et aa.
Lors d'un appariement entre deux individus, l'enfant obtient exactement un gène (au hasard) de chacun de ses parents.
On admet que les couples sont conçus entre parents de la même génération, que la proportion de chacun des génotypes est identique chez les hommes et chez les femmes et que les couples se forment indépendamment des génotypes. Dans une population donnée on note p_n, q_n et r_n les proportions respectives des génotypes AA, Aa et aa à la génération $n \in \mathbb{N}$. La génération 0 est la génération initiale.

1. Probabilité du génotype de l'enfant en fonction de celui des parents.
   (a) En considérant les génotypes de deux parents, montrer qu'il y a six types de couples differents.
   (b) Dans chacune de ces six sitations, donner la probabilité qu'un enfant ait le génotype AA, le génotype Aa et le génotype aa.
2. Dresser un arbre pondéré à trois niveaux de branches (mère de la génération n, père de la génération n, et enfant de la génération $n+1$).
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = \left(p_n + \dfrac{q_n}{2}\right)^2$ et $r_{n+1} = \left(r_n + \dfrac{q_n}{2}\right)^2$.
4. Que vaut, pour $n \in \mathbb{N}$, $p_n + q_n + r_n$?
5. Soit $\alpha = p_0 - q_0$ et (u_n) la suite définie par $u_n = p_n - r_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que (u_n) est une suite constante égale à α.
6. Exprimer p_{n+1} et r_{n+1} en fonction de α.
7. En déduire le principe de Hardy-Weinberg : à partir de la première génération, la proportion de génotypes de chacune des trois sortes ne varie plus.

Exercice 2. Fonction arctangente

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Soit F la primitive de f définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ telle que $F(0) = 0$. *On ne cherchera pas à expliciter F.*

1. Démontrer que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit $G(x) = F(x) + F(-x)$. Démontrer que G est une fonction constante que l'on déterminera. En déduire que F est impaire.
3. (a) Démontrer que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan'(x) = 1 + \tan(x)^2$.
   (b) Démontrer que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $F(\tan(x)) = x$. (on montrera que $F(\tan x) - x$ est constante).
4. Résoudre sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ l'équation $\tan(x) = 1$ et en déduire $F(1)$.
5. Calculer l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$, et la droite d'équation $x = 1$.

Exercice 3. Plan tangent à une sphère

Dans un repère orthonormé , on considère $A(0;3;3)$, $B(3;0;3)$, $C(3;3;0)$ et $\Omega(9;3;6)$. Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère de centre Ω et de rayon $4\sqrt{3}$.[1]

Exercice 4. Intégrales

Calculer[2]

$$I = \int_1^e t^4 \ln(t)dt; \qquad J = \int_e^{e^2} \frac{1}{t\ln(t)}dt; \qquad K = \int_0^1 x^2 e^x dx$$

---

1. Un plan est tangent à une sphère s'il ne la coupe qu'en un point, c'est-à-dire si la distance du plan au centre de la sphère est égale au rayon. On pourra déterminer un vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$ aau plan, puis une équation du plan.

2. I : intégration par parties (IPP), J : $\frac{1}{t\ln t} = \frac{\frac{1}{t}}{\ln t}$, K : double IPP.