Devoir Maison 15 : pour le -07-03-12-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

Exercice 1.

Dans un lot de 100 pièces de monnaie toutes de même apparence, ont été mélangées 60 pièces équilibrées et 40 pièces truquées. La probabilité d'apparition de « Face » lors d'un jet d'une pièce truquée est $\frac{3}{4}$.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On prend une pièce au hasard et on la lance :
   soit T l'évènement : « la pièce est truquée »,
   soit F l'évènement : « on obtient Face » .
   (a) Calculer la probabilité d'obtenir « Face » (on pourra s'aider d'un arbre).
   (b) Quelle est la probabilité que la pièce soit truquée sachant que l'on a obtenu « Face » ?
2. On considère un jeu dont la mise est 10 euros, et qui consiste à choisir une des 100 pièces et à la lancer. Si le résultat est face, on ne gagne rien, sinon on gagne a euros. Soit G la variable aléatoire représentant le gain algébrique de ce jeu.
   (a) Exprimer l'espérance de G en fonction de a.
   (b) Comment choisir a pour que le jeux soit équitable ?
3. On prend une pièce au hasard et on la lance quatre fois.
   ⋆ si au cours des quatre lancers on obtient quatre fois « Face », on décide d'éliminer la pièce,
   ⋆ dans le cas contraire, on décide de conserver la pièce.
   On note E l'évènement « la pièce est éliminée ».
   (a) Quelle est la probabilité que la pièce soit éliminée sachant qu'elle est équilibrée ?
   (b) Quelle est la probabilité que la pièce soit conservée sachant qu'elle est truquée ?
   (c) Quelle est la probabilité d'avoir pris une pièce équilibrée et de l'avoir éliminée ou d'avoir pris une pièce truquée et de l'avoir conservée ?
   (d) Quelle est la probabilité que la pièce soit éliminée sachant qu'elle est truquée ? En déduire $P(E)$.
4. On suppose dans cette question que la probabilité qu'une pièce truquée tombe sur « Face » est $x \in]0;1[$.
   On cherche à décrire une expérience parfaitement équiprobable avec cette pièce. Pour cela :
   ⋆ On effectue une série de deux lancers indépendants de la pièce :
   ⋆ Si le premier lancer est pile (P_1) et le second face (F_2) on dit avoir obtenu A.
   ⋆ Si le premier lancer est face (F_1) et le second pile (P_2) on dit avoir obtenu B
   ⋆ Si les deux lancers donnent des résultats identiques, on recommence l'expérience.
   (a) Représenter la situation correspondant à une série de deux lancers par un arbre.
   (b) Quelle est la d'obtenir A lors de la première série de deux lancers ? d'obtenir B ? De devoir refaire une série de deux lancers ?
   (c) Montrer que $P(A) = x(1-x) + (x^2 + (1-x)^2)P(A)$ et en déduire $P(A)$.
   (d) Conclure.
5. **facultatif** Soit N la variable aléatoire égale au nombre de séries de deux lancers nécessaire avant d'obtenir un résultat A ou B
   (a) Étudier la fonction $p :]0;1[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 + (1-x)^2$. Quel est l'axe de symétrie de sa courbe ?
   (b) Démontrer que pour tout entier $k \geqslant 1$, $P(N \geqslant k) = (p(x))^k$.
   (c) Déduire $P(N = k)$ de : $(N \geqslant k) = (N \geqslant k+1) \cup (N = k)$.
   (d) Expliquer pourquoi $\mathbb{E}(N) = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} P(T \geqslant k)$.
   (e) En déduire $\mathbb{E}(N)$ en fonction de x et interpréter ce nombre.
   (f) Calculer la limite lorsque x tend vers 0 et vers 1 de $\mathbb{E}(N)$. Interpréter.

EXERCICE 2.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

EXERCICE 3. Caractérisation des triangles équilatéraux

Soient A, B, C trois points d'affixes respectives $a, b, c \in \mathbb{C}$.

1. On considère l'équation $z^3 = 1$. Montrer que z est solution si et seulement si $|z| = 1$ et $\arg(z) = 0 \mod \frac{2\pi}{3}$.
2. En déduire que cette équation admet trois solutions : $1, j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et j^2.
3. Montrer que $j^3 - 1 = (j^2 + j + 1)(j - 1)$, puis $j^3 = 1$; $(j^2)^2 = j$; $j^2 + j + 1 = 0$; $j^2 = \bar{j}$
4. Montrer que : ABC est équilatéral direct $\iff b - c = e^{\frac{i\pi}{3}}(a - c)$.
5. En déduire[1] : $\boxed{ABC \text{ équilatéral direct} \iff a + bj + cj^2 = 0}$

EXERCICE 4. Application : Théorème de Napoléon

On veut démontrer le théorème suivant :

Théorème.[2] Soit ABC un triangle direct quelconque. Soient $A'(a'), B'(b'), C'(c')$ tels que $BA'C$, $CB'A$ et $AC'B$ soient des triangles équilatéraux directs. On note $A''(a'')$, $B''(b'')$ et $C''(c'')$ les centres de gravités respectifs de ces trois triangles.
Alors $A''B''C''$ est un triangle équilatéral direct de même centre de gravité que ABC.

1. En utilisant l'équivalence de l'exercice 1, traduire les définitions de A', B' et C' par trois égalités de nombres complexes.
2. Calculer $a'' + jb'' + j^2c''$ et $a'' + b'' + c''$ puis conclure.

EXERCICE 5. Point de Toricelli : **facultatif et difficile**

1. Montrer que $c - c' = c + jb + j^2a$. Calculer de même $a - a'$ et $b - b'$.
   En déduire $j^2(a - a') = j(b - b') = c - c'$.
2. En déduire :
   ⋆ Les segments $[AA']$, $[BB']$ et $[CC']$ sont de même longueur.
   ⋆ $(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BB'}) = (\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CC'}) = (\overrightarrow{CC'}, \overrightarrow{AA'}) = \dfrac{2\pi}{3} \mod 2\pi$
3. Les droites (AA') et (BB') sont sécantes. Pourquoi ? Soit $T(t)$ leur point d'intersection. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que (1) : $\alpha(a - a') = t - b$ et (2) : $\beta(b - b') = t - a$.
4. En ajoutant j^2 fois l'équation (1) à j fois l'équation (2), montrer : $-(\alpha + \beta)(c - c') = -t + c'$. En déduire que les droite $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes en T.
5. On choisit dans la suite $(O;\vec{u},\vec{v})$ orthonormé de sorte que $\vec{u}$ et $\overrightarrow{TA}$ soient de même sens, et $T = O$ (ainsi $t = 0$).
   (a) Montrer[3] : $|a| = a$; $|b| = j^2b$; $|c| = jc$.
   (b) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $(a - z) + j^2(b - z) + j(c - z) = |a| + |b| + |c|$.
   (c) En déduire : $|a - z| + |b - z| + |c - z| \geqslant |a| + |b| + |c|$. (inégalité triangulaire ?)
   (d) En conclure que la somme des distances $AM + BM + CM$ est minimale pour $M = T$.

1. *indication :* multiplier l'égaltié de la question précédente par j...
2. Ce théorème porte le nom de Napoléon Bonaparte (1769-1821), qui, en dépit de son goût pour les mathématiques, et de ses connaissances en la matière acquises lors de sa formation d'artilleur, n'en n'est sans doute pas l'auteur...
3. $|z| = z \iff z$ réel positif