Devoir maison 12 pour le -04-01-12-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

Exercice 1. Équation différentielle logistique

Soit $\lambda \in]0;+\infty[$. On recherche les solutions y définies sur $[0;+\infty[$ et qui ne s'annulent pas de l'équation différentielle (E) : $y' = \lambda\ (1-y)y$

1. Pour tout $t \in [0;+\infty[$, on pose $z(t) = \frac{1}{y(t)}$. Montrer que z est solution de $z' + \lambda\ z = \lambda$ si et seulement si y est solution de (E).
2. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 2. Étude d'une suite implicite

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit $f_n : [0;1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x + x^2 + ... + x^n$.

1. Soit un entier $n \geqslant 1$ fixé.
   (a) Démontrer que pour tout $x \in [0;1[$, $f(x) = x\ \dfrac{1-x^n}{1-x}$. En déduire $f_n(\frac{1}{2}) < 1$.
   (b) Exprimer $f_n(1)$ en fonction de n.
   (c) Dresser le tableau de variations de f_n.
   (d) Démontrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une solution unique, notée x_n et que $\frac{1}{2} < x_n < 1$.
2. Convergence de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$.
   (a) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $x \in [0;1]$ $f_{n+1}(x) = x(1 + f_n(x))$.
   (b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, $f_{n+1}(x_{n+1}) < f_{n+1}(x_n)$ et conclure quant aux variations de (x_n).
   (c) Démontrer que la suite (x_n) est convergente vers une limite ℓ.
3. Limite de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$. Soit un entier $n \geqslant 1$.
   (a) Calculer x_1 et x_2. Démontrer que $n \geqslant 2$, $0 \leqslant x_n^n \leqslant x_2^n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^n$.
   (b) Pourquoi a-t-on $\dfrac{x_n(1-x_n^n)}{1-x_n} = 1$. En déduire $\dfrac{\ell}{1-\ell} = 1$ puis la valeur de ℓ.

Exercice 3. Cadeau pour les fêtes : une des plus belles formules de math

1. [Roc] Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x+t) = f(x)f(t)$ pour tous $x, t \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $f(0) = 1$ ou $f(0) = 0$.
   (b) Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé et g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x+y)$. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = f'(x+t) = f'(x)f(t)$.
   (c) En déduire f vérifie l'équation différentielle $f' = k\ f$ où $k = f'(0)$, puis f.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ x \mapsto \cos(x) + i\sin(x)$.
   (a) Démontrer que pour tous $x, t \in \mathbb{R}$, $f(x+t) = f(x)f(t)$.
   (b) En admettant que les règles de dérivation sont encore valables, calculer $f'(0)$.
   (c) Quelle notation faisant interenir e pourrait-on adopter pour $f(x)$?
3. On note $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$. En déduire la belle[1] formule : $\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$

---

1. formule qui lie simplement les constantes fondamentales des maths : $0, 1, \pi, e$ et i, par les opérations d'addition, de produit et de puissance.