Devoir maison 1 : pour le -14-09-11-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$.

Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité 2 cm. Soit Δ la droite d'équation $y = x$.

Partie A. Ensemble de définition et symétrie

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ maximal de f.
2. Démontrer que f est une fonction impaire, et l'interpréter géométriquement.

Parte B. Comportement asymptotique

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 1, x>1} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1, x<1} f(x)$. Interpréter géométriquement.
2. Montrer qu'il existe, et déterminer, quatre réels a, b, c, d tels que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,
$$f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2-1}$$
3. Démontrer que $\mathcal{C}_f$ admet la droite Δ comme asymptote oblique au voisinage de $+\infty$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
4. Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et Δ pour $x > 0$.

Partie C. Variations et courbe

1. Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, calculer $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de signes de f' ainsi que le tableau de variations de f pour $x \geq 0$.
3. Représenter toutes les asymptotes et les tangentes horizontales de $\mathcal{C}_f$, puis $\mathcal{C}_f$ elle même.

Partie D. Tangentes parallèles à Δ

1. Soit T_{x_0} la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x_0. Déterminer son coefficient directeur.
2. Démontrer qu'il n'existe pas de tangente à $\mathcal{C}_f$ parallèle à Δ.