Contrôle 9 -04-04-12-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

Exercice 1.

La végétation d'un pays imaginaire est composée initialement de trois types de plantes :
40 % sont de type A, 41 % de type B et 19 % de type C.
On admet qu'au début de chaque année :

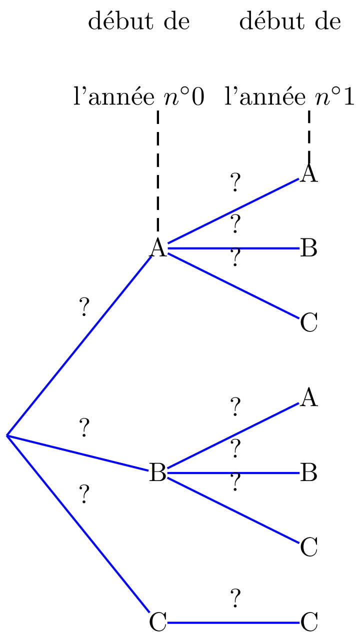
- chaque plante de type A disparaˆit et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type A, B ou C.
- chaque plante de type B disparaˆit et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type A, B ou C.
- chaque plante de type C disparaˆit et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type C.

La probabilité qu'une plante de type A soit remplacée par une plante de même type est $0,6$ et celle qu'elle le soit par une plante de type B est $0,3$.
La probabilité qu'une plante de type B soit remplacée par une plante de même type est $0,6$ et celle qu'elle le soit par une plante de type A est $0,3$.
Au début de chaque année, on choisit au hasard une plante dans la végétation et on relève son type.
Pour tout entier naturel n non nul, on note :

- A_n l'évènement « la plante choisie la n-ième année est de type A »,
- B_n l'évènement « la plante choisie la n-ième année est de type B »,
- C_n l'évènement « la plante choisie la n-ième année est de type C ».

On désigne par p_n, q_n et r_n les probabilités respectives des évènements A_n, B_n et C_n.
Compte tenu de la composition initiale de la végétation (début de l'année $n°0$) on pose : $p_0 = 0,40$, $q_0 = 0,41$ et $r_0 = 0,19$.

1. Recopier sur la copie et compléter l'arbre pondéré ci-contre, en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante. Aucune justification n'est demandée pour cette question.



2. (a) Montrer que $p_1 = 0,363$ puis calculer q_1 et r_1.

   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\begin{cases} p_{n+1} &= 0,6p_n + 0,3q_n \\ q_{n+1} &= 0,3p_n + 0,6q_n \end{cases}$$

3. On définit les suites (S_n) et (D_n) sur $\mathbb{N}$ par $S_n = q_n + p_n$ et $D_n = q_n - p_n$.

   (a) Montrer que (S_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison. On admet que (D_n) est une suite géométrique de raison $0,3$.

   (b) Déterminer les limites des suites (S_n) et (D_n).

   (c) En déduire les limites des suites (p_n), (q_n) et (r_n). Interpréter le résultat.

EXERCICE 2.

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

1. On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln(1 + x).$$

   (a) En étudiant les variations de la fonction f, montrer que, pour tout réel x positif ou nul, $\ln(1+x) \leqslant x$.

   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(u_n) \leqslant 1$.

   (c) La suite (u_n) peut-elle avoir pour limite $+\infty$?

2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $v_n = \ln(u_n)$.

   (a) On pose $x = \dfrac{1}{n}$. Exprimer v_n en fonction de x.

   (b) Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$? Aucune justification n'est demandée.

   Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n$.

   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 3.

Pour chacun des énoncés suivants, indiquer si la proposition correspondante est vraie ou fausse et proposer une justification de la réponse choisie.

1. **Énoncé 1 :**
   Proposition 1 : « si z est un nombre complexe de module 1, alors $z + \dfrac{1}{z}$ est un nombre réel. »
2. **Énoncé 2 :**
   Proposition 2 : « l'équation $e^x - x = 0$ admet une solution unique. »
3. **Énoncé 3 :** Dans le plan complexe d'origine O, on considère, pour tout entier naturel non nul n, les points M_n d'affixe $z_n = \mathrm{e}^{\frac{2in\pi}{3}}$.
   Proposition 3 : « Les points O, M_1 et M_{20} sont alignés. »
4. **Énoncé 4 :** On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 4$. Parmi les quatre courbes ci-dessous, l'une représente la solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$.
   Proposition 4 : « La courbe représentative de la solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$ est la courbe C_4. »