Mathématiques Obligatoires TS1 et TS2 -15-03-12-
Bac blanc, 2011-2012, Lycée Newton

Exercice 1. Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité **5 points**

On considère l'équation différentielle

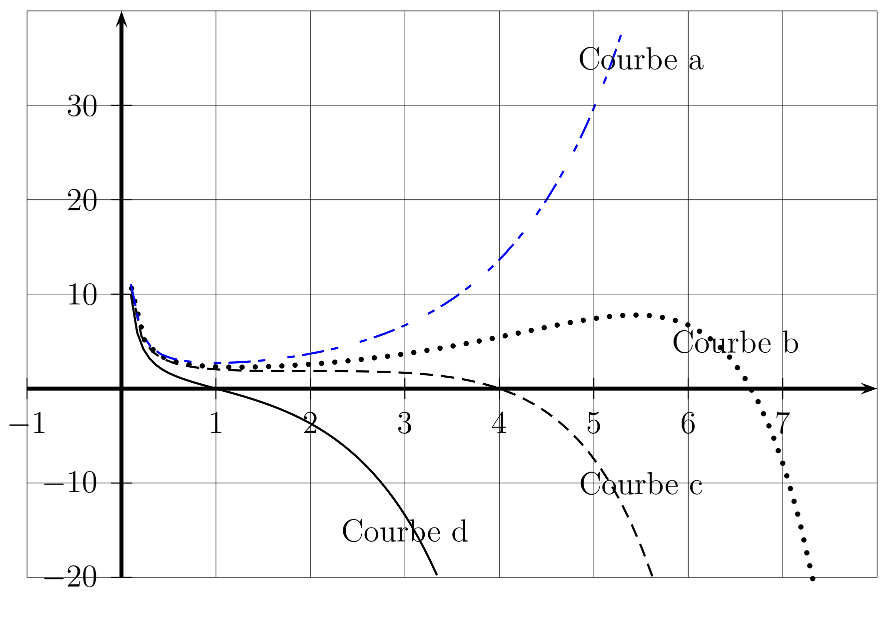
$$(\mathrm{E}) \quad : \quad y - y' = \frac{\mathrm{e}^x}{x^2}$$

et on cherche l'ensemble des solutions de cette équation définies sur $]0\ ;\ +\infty[$.

1. (a) Démontrer que la fonction u définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $u(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ est solution de (E).
   (b) Démontrer qu'une fonction v définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ est solution de (E) si et seulement si la fonction $v - u$, définie sur $]0\ ;\ +\infty[$, est solution de l'équation différentielle $y - y' = 0$.
   (c) En déduire toutes les solutions définies sur $]0\ ;\ +\infty[$ de l'équation (E).
2. Pour tout réel k négatif ou nul, on considère la fonction f_k définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_k(x) = \frac{kx+1}{x}\mathrm{e}^x.$$

   (a) Déterminer les limites de f_k en 0.
   (b) Déterminer, selon les valeurs de k, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{kx+1}{x}$. En déduire la limite de f_k en $+\infty$.
   (c) Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   (d) Déterminer le nombre de solutions sur $]0\ ;\ +\infty[$ de l'équation $f_k(x) = 0$.
3. On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k, dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   On a tracé sur le graphique ci-dessous les courbes $\mathcal{C}_{-1}$, $\mathcal{C}_{-0,25}$, $\mathcal{C}_{-0,15}$ et $\mathcal{C}_0$.
   En utilisant la deuxième question, reconnaître chaque courbe (les réponses doivent être justifiées).



EXERCICE 2. TS1 ET TS2 **5 points**

Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'une part d'un sac contenant exactement un jeton blanc et 9 jetons noirs indiscernables au toucher et d'autre part d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie.

Le joueur doit tirer un jeton puis jeter le dé :

- si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6 ;
- si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6. À la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.

On note B l'évènement « le jeton tiré est blanc » et G l'évènement « le joueur gagne le jeu ». L'événement contraire d'un évènement E sera noté $\overline{\text{E}}$. La probabilité d'un évènement E sera notée $p(\text{E})$.

Partie A

1. Montrer que $p(\text{G}) = \dfrac{7}{30}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu ?
3. Un joueur fait quatre parties de façon indépendante. (c'est-à-dire : les probabilités sont identiques à chaque partie)

   Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur approchée à 10^{-3}, près. (on pourra s'aider d'un arbre)
4. Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à $0,99$?

Partie B

L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent :

- chaque joueur paie 1 € par partie ;
- si le joueur gagne la partie, il reçoit 5 € ;
- si le joueur perd la partie, il ne reçoit rien.

1. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur à l'issue d'une partie.

   (a) Donner la loi de probabilité de X et son espérance $\text{E}(X)$.

   (b) On dit que le jeu est favorable à l'organisateur si $\text{E}(X) < 0$. Le jeu est-il favorable à l'organisateur ?

2. L'organisateur décide de modifier le nombre n de jetons noirs (n entier naturel non nul) tout en gardant un seul jeton blanc. Pour quelles valeurs de l'entier n le jeu est-il défavorable à l'organisateur ?

   Toute trace de recherche, même incomplète, sera évaluée dans cette question

Exercice 3. Commun à tous les candidats **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
L'unité graphique est 1 cm.
On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_{\text{A}} = 2 - 3\text{i}$, $z_{\text{B}} = \text{i}$ et $z_{\text{C}} = 6 - \text{i}$.
On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

Partie A

1. Calculer $\dfrac{z_{\text{B}} - z_{\text{A}}}{z_{\text{C}} - z_{\text{A}}}$.
2. En déduire la nature du triangle ABC.

Partie B

On considère l'application f qui, à tout point M d'affixe z distincte de i, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{\text{i}(z - 2 + 3\text{i})}{z - \text{i}}$$

1. Soit D le point d'affixe $z_{\text{D}} = 1 - \text{i}$. Déterminer l'affixe du point D$'$ image du point D par f.
2. (a) Montrer qu'il existe un unique point, noté E, dont l'image par l'application f est le point d'affixe 2i.
   (b) Démontrer que E est un point de la droite (AB).
3. Démontrer que, pour tout point M distinct du point B, $\text{O}M' = \dfrac{\text{A}M}{\text{B}M}$.
4. Démontrer que, pour tout point M distinct du point A et du point B, on a l'égalité :

$$\left(\vec{u},\ \overrightarrow{\text{O}M'}\right) = \left(\overrightarrow{\text{B}M},\ \overrightarrow{\text{A}M}\right) + \frac{\pi}{2} \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

5. Démontrer que si le point M appartient à la médiatrice du segment [AB] alors le point M' appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
6. Démontrer que si le point M' appartient à l'axe des imaginaires purs, privé du point B, alors le point M appartient à la droite (AB).

Exercice 4. Commun à tous les candidats **5,5 points**

1. Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - x.$$

   (a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

   (b) Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

   (c) Montrer qu'il existe un unique réel α appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

2. Soit g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $g(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1,5$ et pour tout entier naturel n :
   $u_{n+1} = g\left(u_n\right) = \ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$.

   On a représenté en **annexe (à rendre avec la copie)** la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction g et la droite d'équation $y = x$.

   (a) Construire sur l'axe des abscisses, en laissant les traits de construction apparents, les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

   (b) Le graphique permet-il d'émettre les conjectures suivantes ?
   On recopiera sur la copie le numéro de la conjecture suivie de OUI ou NON.
   Aucune justification n'est demandée.
   - Conjecture n° 1 : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. »
   - Conjecture n° 2 : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $0,5$. »
   - Conjecture n° 3 : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1. »

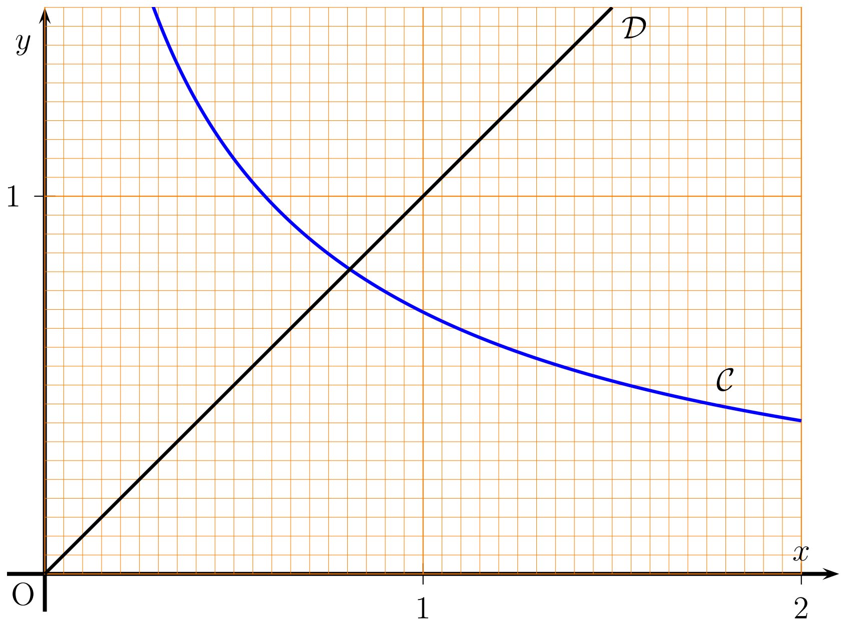
   (c) On admet que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite ℓ strictement positive.

   Bonus : Montrer que $\ln\left(1+\frac{1}{\ell}\right) = \ell$.

   (d) Montrer que $\ell = \alpha$.

ANNEXE de l'exercice 4 : à rendre avec la copie

NOM,CLASSE : ....



Mathématiques Spécialité TS1 et TS2 -15-03-12-
Bac blanc, 2011-2012, Lycée Newton

Exercice 1. Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité **5 points**

Partie A : Question de cours

1. Énoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.
2. Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

Partie B

Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{lll} n & \equiv & 13 \quad (19) \\ n & \equiv & 6 \quad (12) \end{array} \right.$$

1. Démontrer qu'il existe un couple $(u\ ;\ v)$ d'entiers relatifs tel que : $19u + 12v = 1$.
(On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple).
Vérifier que, pour un tel couple, le nombre $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$ est une solution de (S).
2. (a) Soit n_0 une solution de (S), vérifier que le système (S) équivaut à
$$\left\{ \begin{array}{lll} n & \equiv & n_0 \quad (19) \\ n & \equiv & n_0 \quad (12) \end{array} \right.$$
(b) Démontrer que le système $\left\{ \begin{array}{lll} n & \equiv & n_0 \quad (19) \\ n & \equiv & n_0 \quad (12) \end{array} \right.$ équivaut à $n \equiv n_0 \quad (12 \times 19)$.
(on rappelle que $a \equiv b \quad (c) \iff c$ divise $a - b$.)
3. (a) Trouver un couple $(u\ ;\ v)$ solution de l'équation $19u + 12v = 1$ et calculer la valeur de N correspondante.
(b) Déterminer l'ensemble des solutions de (S) (on pourra utiliser la question 2. b.).
4. Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13.
On divise n par $228 = 12 \times 19$. Quel est le reste r de cette division ?

EXERCICE 2. TS1 ET TS2 **5 points**

Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'une part d'un sac contenant exactement un jeton blanc et 9 jetons noirs indiscernables au toucher et d'autre part d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie.
Le joueur doit tirer un jeton puis jeter le dé :

- si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6 ;
- si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6. À la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.

On note B l'évènement « le jeton tiré est blanc » et G l'évènement « le joueur gagne le jeu ». L'événement contraire d'un évènement E sera noté $\overline{\mathrm{E}}$. La probabilité d'un évènement E sera notée $p(\mathrm{E})$.

Partie A

1. Montrer que $p(\mathrm{G}) = \dfrac{7}{30}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu ?
3. Un joueur fait quatre parties de façon indépendante. (c'est-à-dire : les probabilités sont identiques à chaque partie).
   Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur approchée à 10^{-3}, près. (on pourra s'aider d'un arbre)
4. Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à $0,99$?

Partie B

L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent :

- chaque joueur paie 1 € par partie ;
- si le joueur gagne la partie, il reçoit 5 € ;
- si le joueur perd la partie, il ne reçoit rien.

1. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur à l'issue d'une partie.
   (a) Donner la loi de probabilité de X et son espérance $\mathrm{E}(X)$.
   (b) On dit que le jeu est favorable à l'organisateur si $\mathrm{E}(X) < 0$. Le jeu est-il favorable à l'organisateur ?
2. L'organisateur décide de modifier le nombre n de jetons noirs (n entier naturel non nul) tout en gardant un seul jeton blanc. Pour quelles valeurs de l'entier n le jeu est-il défavorable à l'organisateur ?
   Toute trace de recherche, même incomplète, sera évaluée dans cette question

Mathématiques Obligatoires TS3 -15-03-12-
Bac Blanc, 2011-2012, Lycée Newton

Exercice 1. Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité **5 points**

On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \quad : \quad y - y' = \frac{\mathrm{e}^x}{x^2}$$

et on cherche l'ensemble des solutions de cette équation définies sur $]0\ ;\ +\infty[$.

1. (a) Démontrer que la fonction u définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $u(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ est solution de (E).

   (b) Démontrer qu'une fonction v définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ est solution de (E) si et seulement si la fonction $v - u$, définie sur $]0\ ;\ +\infty[$, est solution de l'équation différentielle $y - y' = 0$.

   (c) En déduire toutes les solutions définies sur $]0\ ;\ +\infty[$ de l'équation (E).

2. Pour tout réel k négatif ou nul, on considère la fonction f_k définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_k(x) = \frac{kx+1}{x}\mathrm{e}^x.$$

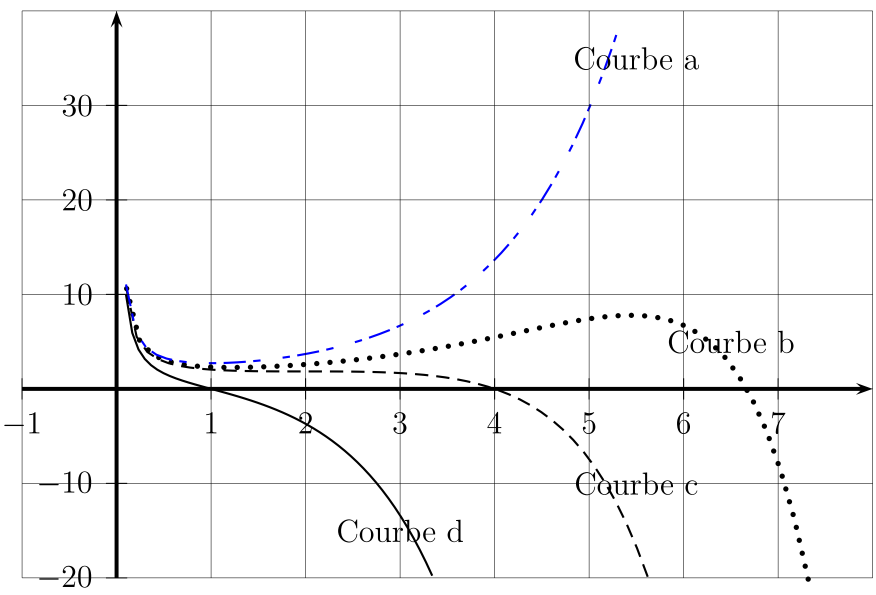
   (a) Déterminer les limites de f_k en 0.

   (b) Déterminer, selon les valeurs de k, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{kx+1}{x}$. En déduire la limite de f_k en $+\infty$.

   (c) Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

   (d) Déterminer le nombre de solutions sur $]0\ ;\ +\infty[$ de l'équation $f_k(x) = 0$.

3. On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k, dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   On a tracé sur le graphique ci-dessous les courbes $\mathcal{C}_{-1}$, $\mathcal{C}_{-0,25}$, $\mathcal{C}_{-0,15}$ et $\mathcal{C}_0$.
   En utilisant la deuxième question, reconnaître chaque courbe (les réponses doivent être justifiées).



EXERCICE 2. TS3 **5 points**

Partie A.

Dix affirmations, réparties en trois thèmes et numérotées de 1. a à 3. d sont proposées ci-dessous. Le candidat portera sur sa copie, en regard du numéro de l'affirmation, et avec le plus grand soin, la mention VRAI ou FAUX.

Chaque réponse convenable rapporte 0,4 point. Chaque réponse erronée enlève 0,1 point. Il n'est pas tenu compte de l'absence de réponse. Un éventuel total négatif est ramené à 0.

1. Pour tout réel x, e^x désigne l'image de x par la fonction exponentielle.

Affirmation 1. a	Pour tous les réels a et b : $\left(\mathrm{e}^a\right)^b = \mathrm{e}^{\left(a^b\right)}$.
Affirmation 1. b	Pour tous les réels a et b : $\mathrm{e}^{a-b} = \dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$.
Affirmation 1. c	La droite d'équation $y = x + 1$ est la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle en son point d'abscisse 1.

2. Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit a un élément de I.

Affirmation 2. a	Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.
Affirmation 2. b	Si f est continue en a, alors f est dérivable en a.
Affirmation 2. c	Si f est dérivable en a, alors la fonction $h \mapsto \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie en 0.

3. On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$.

Affirmation 3. a	Si $\lim u_n = +\infty$ et si $\lim v_n = -\infty$ alors $\lim (u_n + v_n) = 0$.
Affirmation 3. b	Si (u_n) converge vers un réel non nul et si $\lim v_n = +\infty$, alors la suite $(u_n, \times v_n)$ ne converge pas.
Affirmation 3. c	Si (u_n) converge vers un réel non nul, si (v_n) est positive et si $\lim v_n = 0$, alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ ne converge pas.
Affirmation 3. d	Si (u_n) et (v_n) convergent alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge.

Partie B

Dire si l'affirmation suivante est vraie ou fausse, sans justifier. Une réponse correcte apporte un point, une réponse fausse coûte 0,5 point, l'absence de réponse n'apporte ni ne coûte rien.

f est la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$.

$\mathcal{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère du plan.

<u>Affirmation :</u> La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 est parallèle à la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{4}x$.