Contrôle 7 : Logarithmes -14-02-12-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

Exercice 1.

On considère l'équation notée (E) : $\ln x = -x$.

Le but de l'exercice est de prouver que l'équation (E), admet une solution unique notée α appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et d'utiliser une suite convergente pour en obtenir un encadrement.

Partie A : existence et unicité de la solution
On considère la fonction f défmie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x + \ln x$.

1. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie B : encadrement de la solution α
On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{4x - \ln x}{5}$.

1. Étude de quelques propriétés de la fonction g.
   (a) Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   (b) En déduire que pour tout $x \in \left[\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right]$, $g(x)$ appartient à cet intervalle.
   (c) Démontrer qu'un nombre réel $x \in]0\ ;\ +\infty[$ est solution de l'équation (E) si et seulement si $g(x) = x$.
2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = g(u_n)$.
   (a) En utilisant le sens de variation de la fonction g, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) converge vers α.
3. Recherche d'une valeur approchée de α
   (a) À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_{10}, arrondie à la sixième décimale.
   (b) On admet que u_{10} est une valeur approchée par défaut à 5×10^{-4} près de α.
   En déduire un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α.

Exercice 2.

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs tels que $a < b$.
On désigne par A et par B les points d'abscisses respectives a et b de la courbe Γ représentative de la fonction logarithme népérien dans un repère orthononnal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Les points Q et R sont les projetés orthogonaux respectifs des points A et B sur l'axe des ordonnées.

1. (a) Donner l'équation réduite de la tangente (T) au point A à la courbe Γ.
   (b) Déterminer l'ordonnée du point d'intersection P de (T) avec l'axe des ordonnées.
   Calculer la longueur PQ. En déduire une construction simple de (T) ; la réaliser sur la figure en annexe.
2. **Restitution organisée de connaissances**
   On suppose connue la propriété :
   « Pour tout couple $(x\ ;\ y)$ de nombres réels strictement positifs, on a $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$. »
   En déduire que, pour tout nombre réel m strictement positif, on a $\ln\left(\sqrt{m}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(m)$.
3. Utiliser le résultat de la question 2 pour placer sur l'axe des abscisses le point G d'abscisse $\sqrt{ab}$. Expliquer la construction et la réaliser sur la figure de l'annexe 1 (on laissera les traits de construction apparents).

ANNEXE 1

(À rendre avec la copie)

Exercice 1