Contrôle 6 : Complexes -07-02-12-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

Exercice 1.

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité 1 cm.

1. **Restitution organisée de connaissances**

   Pour $M \neq \Omega$, on rappelle que le point M' est l'image du point M par la rotation r de centre Ω et d'angle de mesure θ si et seulement si :

   $$\left\{\begin{array}{rcll} \Omega M' & = & \Omega M & (1) \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}\ ;\ \overrightarrow{\Omega M'}\right) & = & \theta \text{ à } 2k\pi \text{ près } (k\in\mathbb{Z}) & (2) \end{array}\right.$$

   (a) Soient z, z' et ω les affixes respectives des points M, M' et Ω.
   Traduire le relations (1) et (2) en termes de modules et d'arguments.

   (b) En déduire l'expression de z' en fonction de z, θ et ω

2. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0$.
   On donnera les solutions sous forme algébrique.

3. Soient A et B les points d'affixes respectives $a = 2\sqrt{3} - 2\text{i}$ et $b = 2\sqrt{3} + 2\text{i}$.

   (a) Écrire a et b sous forme exponentielle.

   (b) Faire une figure et placer les points A et B.

   (c) Montrer que OAB est un triangle équilatéral.

4. Soit C le point d'affixe $c = -8\text{i}$ et D son image par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.
   Placer les points C et D. Montrer que l'affixe du point D est $d = 4\sqrt{3} + 4\text{i}$.

5. Montrer que D est l'image du point B par une homothétie de centre O dont on déterminera le rapport.

6. Montrer que OAD est un triangle rectangle.

Exercice 2.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On prendra pour le dessin : $\|\vec{u}\| = 4$ cm.
M est un point d'affixe z non nul. On désigne par M' le point d'affixe z' telle que $z' = -\dfrac{1}{\overline{z}}$ où $\overline{z}$ désigne le conjugué du nombre complexe z.

A - Quelques propriétés

1. Soit z un nombre complexe non nul. Déterminer une relation entre les modules de z et z' puis une relation entre les arguments de z et z'.
2. Démontrer que les points O, M et M' sont alignés.
3. Démontrer que pour tout nombre complexe z non nul on a l'égalité : $\overline{z'+1} = \dfrac{1}{z}(z-1)$.

B - Construction de l'image d'un point

On désigne par A et B les deux points d'affixes respectives 1 et -1.
On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie : $|z-1| = 1$.

1. Quelle est la nature de l'ensemble $\mathcal{C}$?
2. Soit M un point de $\mathcal{C}$ d'affixe z, distinct du point O.

   (a) Démontrer que $|z'+1| = |z'|$. Interpréter géométriquement cette égalité.

   (b) Est-il vrai que si z' vérifie l'égalité : $|z'+1| = |z'|$, alors z vérifie l'égalité : $|z-1| = 1$?

3. Tracer l'ensemble $\mathcal{C}$ sur une figure. Si M est sur $\mathcal{C}$, décrire et réaliser la construction du point M'.