CONTRÔLE COMMUN -11-01-12-
Terminales S, 2011-2012, Lycée Newton

EXERCICE 1.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x - 1} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

Partie A. Continuité et limites

1. Restitution de connaissances : à partir des résultats suivants :
   - La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et égale à sa dérivée.
   - $e^0 = 1$

   démontrer : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$.
2. En déduire que la fonction f est continue en 0.
3. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et l'interpréter en terme d'asymptote.
4. Montrer que pour $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{x}{1 - e^{-x}}$. Montrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

Partie B. Variations

1. Restitution de connaissances : montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant x + 1$ et que l'égalité n'a lieu que pour $x = 0$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\}$ et que

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} - \{0\},\ f'(x) = \frac{e^x(e^x - (x+1))}{(e^x - 1)^2}$$

3. Dresser le tableau de variations complet de f.
4. Montrer que l'équation $f(x) = e$ admet une unique solution α dont on donnera une valeur approchée au centième.

Partie C. Une famille de droites.

Soit x un réel non nul et la droite $\mathcal{D}_x = (MM')$ où : $M(x; f(x))$ et $M'(-x; f(-x))$.

1. Établir que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $f(-x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$. En déduire la valeur de $\dfrac{f(x) - f(-x)}{2x}$.
2. Montrer que lorsque $x \neq 0$, les droites $\mathcal{D}_x$ sont parallèles entre elles.
   (*toute trace de recherche sera valorisée*)

EXERCICE 2.

Soit f la fonction définie par : $f : \begin{cases}]-\infty; 6[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \dfrac{9}{6-x} \end{cases}$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{9}{6-u_n} = f(u_n) \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie à partir de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Étude graphique.
   (a) La courbe représentative de la fonction f et la droite d'équation $y = x$ sont représentées sur l'annexe à rendre. Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.
   (b) Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?
2. (a) Dresser le tableau de variation de f et en déduire que si $x < 3$ alors $f(x) < 3$.
   (b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 3$.
3. Dans cette question, on se propose d'étudier la suite (u_n) en déterminant une expression de u_n en fonction de n.
   (a) Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.
   (b) En déduire une expression explicite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Valider les conjectures émises à la question 1.b.

EXERCICE 3.

On considère les trois équations différentielles ([1])

$$(E) :\ y' = \sqrt{3}\, y + \cos(x)e^{\sqrt{3}\,x} \quad (E_0) :\ y' = \sqrt{3}\, y \quad (P) :\ y' = \cos(x)$$

Partie 1.

1. Quelle est la solution u de (E_0) qui vérifie $u(0) = 1$?
2. Dans cette question, on cherche une solution de (E) de la forme $y(x) = \varphi(x)u(x)$ où φ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à déterminer.
   (a) Montrer que y est solution de (E) si et seulement si φ est solution de (P).
   (b) Trouver une fonction φ_0 solution de (P).
   (c) Montrer que φ est solution de (P) si et seulement si $\varphi - \varphi_0$ est une fonction constante.
   (d) En déduire que y est solution de (E) si et seulement si $y(x) = (\sin(x) + C)e^{\sqrt{3}\,x}$ pour x réel, où C est une constante réelle.
3. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie $f(0) = 2$.

Partie 2.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (\sin(x) + 2)e^{\sqrt{3}\,x}$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. (on pourra utiliser un encadrement de $\sin(x)$).
2. Calculer la dérivée f' de f. Montrer que $f'(x) = 2(\sqrt{3} + \cos(x - \frac{\pi}{3}))e^{\sqrt{3}\,x}$ pour $x \in \mathbb{R}$.
3. Dresser le tableau de variations complet de f.

1. ⚠ le y n'est pas sous la racine : il s'agit de $\sqrt{3} \times y$ et pas $\sqrt{3y}$. Même remarque pour le x plus bas

NOM : ....

ANNEXE DE L'EXERCICE 2. A RENDRE AVEC LA COPIE