Contrôle 4 : Fonction exponentielle -06-12-11-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

Exercice 1. (≈ 7) Équation différentielle avec second membre affine.

1. Restitution de connaissances : soit (H) l'équation différentielle $y' + 2y = 0$.
   (a) Démontrer que la fonction f définie par $f(x) = e^{-2x}$ pour x réel est solution de (H).
   (b) Déterminer l'ensemble des solutions dérivables sur $\mathbb{R}$ de (H).
2. Soit $(E): \ y' + 2y = 2x + 3$. Trouver une fonction affine u solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'une fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si $y - u$ est solution de (H). En déduire l'ensemble des solutions de (E).
4. Montrer que la courbe d'une solution y de (E) admet une asymptote d'équation $y = x + 1$.
5. Montrer la proposition $(\mathcal{P})$: « si $y(0) \leqslant 1$ alors y est strictement croissante. »
6. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} y(x)$ lorsque $y(0) > 1$. En déduire que la réciproque de $(\mathcal{P})$ est vraie.

Exercice 2. (≈ 10) Étude de fonction

Soit f la fonction définie[1] par $f(x) = \dfrac{e^x + e - 2}{e^{-x} - e}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1. **Restitution de connaissances.** Prouver que $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ pour tous réels x, y en utilisant (sans les démontrer) les résultats suivants :
   $\star$ exp est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$.
   $\star$ $\exp(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. **Études de signes**
   (a) Calculer $f(0)$.
   (b) Dresser le tableau de signes de $e^{-x} - e$.
   (c) Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$, $-e^{2x+1} + 2e^x + e - 2 = (e^{x+1} + e - 2)(1 - e^x)$.
   En déduire que $-e^{2x+1} + 2e^x + e - 2$ est du signe de $1 - e^x$, que l'on déterminera.
3. **Ensemble de définition et limites**. (on pourra utiliser 2(b).)
   (a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
   (b) Calculer $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$. Interpréter.
   (c) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Interpréter.
4. **Variations et courbe**.
   (a) Prouver : f dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et $f'(x) = \dfrac{e^{-x}(-e^{2x+1} + 2e^x + e - 2)}{(e^{-x} - e)^2}$ pour $x \in \mathcal{D}_f$.
   (b) Déduire de 2(c) le tableau de variations complet de f.
   (c) Représenter $\mathcal{C}$ et ses éléments remarquables (unité graphique : 2 cm).

Exercice 3. (≈ 3) Étude d'une équation différentielle par changement de fonction.

1. Soit g une fonction dérivable sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et y définie sur I par $y(x) = g(x)\cos(x)$. Démontrer que y est solution de l'équation $(E): \ y' + (1 + \tan(x))\ y = \cos(x)$ si et seulement si g est solution de l'équation $(E'): \ g' + g = 1$.
2. Donner l'ensemble des solutions de (E') sur I et en déduire l'ensemble des solutions de (E) sur I.
3. Laquelle de ces solutions s'annule en $x = 0$?

1. on rappelle que le nombre e est défini par $e = \exp(1) = e^1$.