CONTRÔLE 3 : SUITES -08-11-11-
Terminale S2, 2011-2012

EXERCICE 1. [≈ 6pts]

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Soit $x \in]0;1]$. Démontrer que $\sqrt{x} \in]0;1]$ et que $x \leq \sqrt{x}$.
2. Soit $(u_n) \in \mathcal{E}$ avec $u_0 \in]0;1]$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0;1]$ puis que la suite (u_n) est croissante.
3. Soit $(v_n) \in \mathcal{E}$ avec $v_0 \geq 1$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \frac{1}{v_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(u_n) \in \mathcal{E}$ et $u_0 \in]0;1]$. En déduire que (v_n) décroît et $v_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Soit $(u_n) \in \mathcal{E}$. Déduire de ce qui précède que (u_n) converge et déterminer sa limite.

EXERCICE 2. [≈ 4pts]

On définit la suite $(w_n)_{n\geq 1}$ par $w_1 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \geq 1$, $w_{n+1} = w_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$.

1. Exprimer w_2 et w_3 sous forme de fractions irréductibles.
2. En déduire une conjecture d'une expression explicite de w_n en fonction de l'entier $n \geq 1$.
3. Prouver la conjecture. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

EXERCICE 3. [≈ 6pts]

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = 13$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{5}a_n + \dfrac{4}{5}$.

   Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + ... + a_n$.
   (a) Soit (b_n) définie par $b_n = a_n - 1$ pour $n \in \mathbb{N}$. Exprimer b_{n+1} en fonction de b_n et en déduire que (b_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le terme b_0.
   (b) Déduire de ce qui précède que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 1 + \dfrac{12}{5^n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.
   (c) Déterminer le sens de variation de la suite (S_n).
   (d) Exprimer S_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.
2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Indiquer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.
   Justifier. (par une démo si elles sont vraies, un contre exemple si elles sont fausses).
   (a) « Si la suite (x_n) converge alors (s_n) converge aussi. »
   (b) « Les suites (x_n) et (s_n) ont même sens de variation. »

EXERCICE 4. [≈ 4pts]

1. La proposition suivante est-elle vraie : « toute suite bornée converge » ? Justifier.
2. Prouver que toute suite croissante est minorée.
3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq w_n$.
   Démontrer la proposition suivante en utilisant, sans les démontrer, les théorèmes du cours :
   « Si les suites (u_n) et (w_n) sont adjacentes, alors la suite (v_n) est convergente »