Contrôle Commun 3h -12-10-11-
Terminale S 2011-2012

*La qualité de la rédaction rentrera pour une part importante dans l'évaluation.*
*On notera que toutes les questions peuvent être traitées de manière indépendante.*
*Toute tentative de réponse, même partielle ou incomplète sera évaluée.*

## Exercice 1 : étude d'une fonction irrationnelle

Le but de l'exercice est l'étude de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x(x-1)^2(2-x)}$.
On peut donc noter que $f(x) = \sqrt{g(x)}$, avec $g : x \mapsto x(x-1)^2(2-x)$.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé d'unité 8 cm.

1. Un résultat préliminaire.
   En utilisant le résultat suivant : si $u$ et $v$ sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction $uv$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $(uv)' = u'v + uv'$,
   démontrer que : si $u$, $v$ et $w$ sont trois fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction $uvw$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée :
   $$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'.$$
2. Étude de la fonction $g$
   (a) Dresser le tableau de signes de $g(x)$.
   (b) Justifier que $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, à l'aide du résultat de 1, montrer que :
   $$g'(x) = 2(x-1)(-2x^2 + 4x - 1)$$
3. Ensemble de définition de $f$ et symétrie
   (a) À l'aide de la question 2a, donner le domaine de défintion maximal de $f$.
   (b) Justifer que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.
4. Étude de la dérivabilité de $f$
   (a) Justifier que $f$ est dérivable sur $]0; 2[$.
   (b) Montrer que $f$ n'est pas dérivable en 0 et que $\mathcal{C}_f$ possède une tangente verticale au point d'abscisse 0.
   (c) D'après la question 3b, que peut-on en déduire sur la dérivabilité de $f$ en 2 et la tangente au point d'abscisse 2 ?
   (d) Calculer
   $$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \text{ et } \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$
   (on remarquera bien que $h = -\sqrt{h^2}$ si $h < 0$). Que peut-on conclure sur la dérivabilité de $f$ en 1 ? Comment interpréter graphiquement ces deux résultats ?
5. Étude des variations de $f$ et graphique
   (a) Calculer $f'(x)$ sur $]0; 2[$ et montrer qu'elle est du signe de $g'(x)$.
   (b) Dresser le tableau de variation de $f$. On calculera notamment la valeur exacte des extrema de $f$.
   (c) Représenter toutes les tangentes remarquables, l'axe de symétrie, puis $\mathcal{C}_f$.

### Exercice 2 : un problème concret

**Partie A** : les 3 premières questions sont indépendantes

Soit $f$ une fonction définie sur $\mathcal{D}_f = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \frac{7}{2} + 2\tan(x) - \frac{4}{\cos(x)}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Montrer que pour $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = \frac{7}{2} + \frac{2\sin(x) - 4}{\cos(x)}$. En déduire $\lim\limits_{x \mapsto \frac{\pi}{2}^-} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.
2. Justifier que $f$ est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et que pour $x \in \mathcal{D}_f$, $f'(x) = \frac{2(1 - 2\sin(x))}{(\cos(x))^2}$.
3. Résoudre $1 - 2\sin(x) \geq 0$ sur l'intervalle $\mathcal{D}_f$.
4. En déduire les variations de $f$ sur $\mathcal{D}_f$ et dresser son tableau de variation complet. On indiquera notamment la valeur exacte et simplifiée du maximum de $f$.
5. Tracer $\mathcal{C}_f$ et ses éléments remarquables.

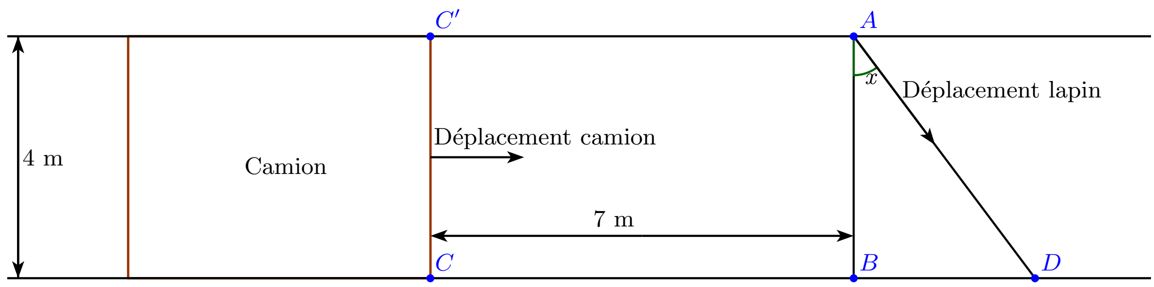
**Partie B** : seule la question 4 fait appel aux résultats du A.

Un lapin désire traverser une route de 4 mètres de largeur. Un camion arrive à sa rencontre à 60 km/h.

L'avant du camion est représenté par le segment [CC'] sur le schéma ci dessous.

Le lapin décide de traverser alors que le camion est à 7 mètres de lui. Il part du point A en direction du point D en ligne droite, à 30 km/h.

Cette direction est repérée par l'angle $x = \widehat{BAD}$ avec $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$.




1. Convertir la vitesse du camion et celle du lapin en m/s.
2. Déterminer AD et CD en fonction de $x$.
3. En déduire les temps (en seconde) $t_l$ et $t_c$ mis par le lapin et par le camion pour parcourir respectivement AD et CD.
4. En déduire que le lapin survit si et seulement si $f(x) > 0$. En déduire une valeur de $x$ qui lui permet de survivre.
5. Donner, à l'aide de la calculatrice et sans justifier, l'intervalle angulaire pour $x$ qui assure la survie du lapin. On donnera des valeurs en radian puis en degré, arrondies au degré près.

### Exercice 3 : problème ouvert

Soit $\varphi$ la fonction numérique définie sur $R$ par : $\varphi(x) = \frac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$.

Déterminer les réels $a$ et $b$ pour que la courbe représentative de $\varphi$ soit tangente au point $I$ de coordonnées $(0 ; 3)$ à la droite d'équation $y = 4x + 3$.