Mathématiques Obligatoires, 4 heures -16-05-12-
Terminales S, 2011-2012, Lycée Newton

Exercice 1. Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité. **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les points A et B d'affixes respectives : $a = \mathrm{i}$ et $b = 1 + \mathrm{i}$.
On note : r_{A} la rotation de centre A, d'angle $\frac{\pi}{2}$, r_{B} la rotation de centre B, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r_{O} la rotation de centre O, d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Partie A

On considère le point C d'affixe $c = 3\mathrm{i}$. On appelle D l'image de C par r_{A}, G l'image de D par r_{B} et H l'image de C par r_{O}.
On note d, g et h les affixes respectives des points D, G et H.

1. Démontrer que $d = -2 + \mathrm{i}$.
2. Déterminer g et h.
3. Démontrer que le quadrilatère CDGH est un rectangle.

Partie B

On considère un point M, distinct de O et de A, d'affixe m. On appelle N l'image de M par r_{A}, P l'image de N par r_{B} et Q l'image de M par r_{O}.
On note n, p et q les affixes respectives des points N, P et Q.

1. Montrer que $n = \mathrm{i}m + 1 + \mathrm{i}$. On admettra que $p = -m + 1 + \mathrm{i}$ et $q = -\mathrm{i}m$.
2. Montrer que le quadrilatère $MNPQ$ est un parallélogramme.
3. (a) Montrer l'égalité : $\dfrac{m-n}{p-n} = \mathrm{i} + \dfrac{1}{m}$.
   (b) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Déterminer l'ensemble (Γ) des points M tels que le quadrilatère $MNPQ$ soit un rectangle.

Exercice 2. Commun à tous les candidats. **5 points**

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
On considère les plans P et Q d'équations respectives : $x + y + z = 0$ et $2x + 3y + z - 4 = 0$.

1. Montrer que l'intersection des plans P et Q est la droite D dont une représentation paramétrique est :
$$\left\{\begin{array}{rcr} x & = & -4-2t \\ y & = & 4+t \\ z & = & t \end{array}\right. \text{ où } t \text{ est un nombre réel.}$$
2. Soit λ un nombre réel.
   On considère le plan P_λ d'équation : $(1-\lambda)(x+y+z) + \lambda(2x+3y+z-4) = 0$.
   (a) Vérifier que le vecteur $\vec{n}(1+\lambda\ ;\ 1+2\lambda\ ;\ 1)$ est un vecteur normal du plan P_λ.
   (b) Donner une valeur du nombre réel λ pour laquelle les plans P et P_λ sont confondus.
   (c) Existe-t-il un nombre réel λ pour lequel les plans P et P_λ sont perpendiculaires ?
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite D', intersection des plans P et P_{-1}.
   Montrer que les droites D et D'sont confondues.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   On considère le point A$(1\,;1\,;1)$.
   Déterminer la distance du point A à la droite D, c'est-à-dire la distance entre le point A et son projeté orthogonal sur la droite D.

EXERCICE 3. Commun à tous les candidats **5 points**

Un candidat participe à un jeu télévisé qui comporte deux épreuves. La première consiste à répondre à une question tirée au hasard parmi celles que l'assistante a prélevées dans une urne.

Dans la seconde, il doit répondre à une série de 10 questions sur un thème qu'il choisit.

1. L'urne contient dix bulletins indiscernables au toucher comportant chacun une question.
Toutes les questions sont différentes, quatre portent sur l'histoire, quatre portent sur la littérature et deux sur le sport.
En début d'émission, l'assistante tire au hasard et simultanément 4 bulletins de l'urne.
On note A l'évènement « les quatre questions portent sur l'histoire » et B l'évènement « l'une au moins des quatre questions porte sur le sport ».
Déterminer la probabilité des évènements A et B.
2. L'animateur annonce les thèmes sur lesquels portent les questions des quatre bulletins choisis par l'assistante. Il y a une question d'histoire, deux de littérature et une sur le sport.
Le candidat tire au hasard l'un de ces quatre bulletins.
On admet que la probabilité que sa réponse soit correcte est $0,7$ s'il s'agit d'une question d'histoire, $0,6$ s'il s'agit d'une question de littérature et $0,5$ pour une question sur le sport.
On considère les évènements suivants :
H : « la question posée au candidat porte sur l'histoire »
L : « la question posée au candidat porte sur la littérature »
S : « la question posée au candidat porte sur le sport »
C : « le candidat répond correctement à la question posée »
   (a) Représenter par un arbre pondéré la situation correspondant à cette première épreuve.
   (b) Calculer la probabilité de l'évènement C.
   (c) Sachant que le candidat a répondu correctement, quelle est la probabilité que la question posée ait porté sur le sport ?
3. Le candidat a réussi cette première épreuve et choisit l'histoire comme thème pour la seconde épreuve. Les dix questions qu'on lui pose sont indépendantes et on suppose toujours que la probabilité qu'il réponde correctement à chaque question est égale à $0,7$.
On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de bonnes réponses données par le candidat.
   (a) Soit k un entier compris entre 0 et 10.
   Quelle est l'expression de la probabilité de l'évènement $\{X = k\}$ en fonction de k ? On justifiera la réponse.
   (b) Déterminer la probabilité que le candidat donne au moins neuf bonnes réponses. On arrondira le résultat à 10^{-2}.

EXERCICE 4. Commun à tous les candidats **5 points**

Le but de cet exercice est de déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \left(\frac{e^{-x}}{2-x}\right) dx$$

1. (a) Étudier les variations de la fonction $f\ : x \longmapsto f(x) = \dfrac{e^{-x}}{2-x}$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.
   (b) Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, on a $\dfrac{1}{e} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.
2. Soit J et K les intégrales définies par $J = \displaystyle\int_0^1 (2+x)e^{-x}dx$ et $K = \displaystyle\int_0^1 x^2 f(x)dx$.
   (a) Au moyen d'une intégration par parties, prouver que $J = 3 - \dfrac{4}{e}$.
   (b) Utiliser un encadrement de $f(x)$ obtenu précédemment pour démontrer que $\dfrac{1}{3e} \leqslant K \leqslant \dfrac{1}{6}$.
   (c) Démontrer que $J + K = 4I$.
   (d) Déduire de tout ce qui précède un encadrement de I, puis donner une valeur approchée à 10^{-2} près de I.

Mathématiques Spécialité, 4 heures -16-05-12-
Terminales S, 2011-2012, Lycée Newton

Exercice 1. Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité **5 points**

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonornal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
   Soient A, B et C les points d'affixes respectives
   $$z_{\text{A}} = 2 + \text{i}, \quad z_{\text{B}} = 5 + 2\text{i} \quad \text{et} \quad z_{\text{C}} = \text{i}.$$
   s_1 désigne la symétrie d'axe (AB).
   (a) Démontrer que s_1 transforme tout point M d'affixe z en un point M' d'affixe z' telle que
   $$z' = \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\text{i}\right)\overline{z} + \left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}\text{i}\right)$$
   (b) En déduire l'affixe de C′, symétrique de C par rapport à (AB).
   (c) Démontrer que l'ensemble des points M tels que z' est imaginaire pur est la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $4x + 3y = 1$.
   (d) Vérifier que le point C′ appartient à $(\mathcal{D})$.
2. (a) Démontrer que les droites $(\mathcal{D})$ et (AB) sont sécantes en un point Ω dont on précisera l'affixe ω.
   (b) On désigne par s_2 la symétrie d'axe $(\mathcal{D})$ et par f la transformation définie par $f = s_2 \circ s_1$. Justifier que f est une similitude directe et préciser son rapport.
   (c) Déterminer les images des points C et Ω par la transformation f.
   (d) Justifier que f est une rotation dont on donnera le centre.
3. *Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n 'aboutit pas.*
   (a) Déterminer les couples d'entiers relatifs $(x\ ;\ y)$ solutions de l'équation : $4x + 3y = 1$.
   (b) Déterminer les points de $(\mathcal{D})$ à coordonnées entières dont la distance au point O est inférieure à 9.

Exercice 2. Commun à tous les candidats. **5 points**

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k})$.
On considère les plans P et Q d'équations respectives : $x + y + z = 0$ et $2x + 3y + z - 4 = 0$.

1. Montrer que l'intersection des plans P et Q est la droite D dont une représentation paramétrique est :
   $$\left\{\begin{array}{rcr} x & = & -4 - 2t \\ y & = & 4 + t \\ z & = & t \end{array}\right. \text{ où } t \text{ est un nombre réel.}$$
2. Soit λ un nombre réel.
   On considère le plan P_λ d'équation : $(1 - \lambda)(x + y + z) + \lambda(2x + 3y + z - 4) = 0$.
   (a) Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n}(1 + \lambda\ ;\ 1 + 2\lambda\ ;\ 1)$ est un vecteur normal du plan P_λ.
   (b) Donner une valeur du nombre réel λ pour laquelle les plans P et P_λ sont confondus.
   (c) Existe-t-il un nombre réel λ pour lequel les plans P et P_λ sont perpendiculaires ?
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite D', intersection des plans P et P_{-1}.
   Montrer que les droites D et D'sont confondues.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   On considère le point A(1 ; 1 ; 1).
   Déterminer la distance du point A à la droite D, c'est-à-dire la distance entre le point A et son projeté orthogonal sur la droite D.