

La qualité de la rédaction rentrera pour une part importante dans l'évaluation.

On notera que toutes les questions peuvent être traitées de manière indépendante. (même si certaines nécessitent d'admettre un résultat précédent, comme la question 3b qui repose sur l'expression de f' donnée en 3a.).

Toute tentative de réponse, même partielle ou incomplète sera évaluée.

EXERCICE 1. ÉTUDE D'UNE FRACTION RATIONNELLE

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 2}{3 - x}$$

On note Δ la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$ et Ω le point de coordonnées $\left(3; \frac{5}{2}\right)$

1. Éléments remarquables

- (a) Déterminer l'ensemble de définition maximal \mathcal{D} de la fonction f .
- (b) Démontrer que \mathcal{C} admet Ω comme centre de symétrie.
- (c) Déterminer l'ensemble des points d'intersection de \mathcal{C} avec l'axe des ordonnées.
- (d) Déterminer l'ensemble des points d'intersection de \mathcal{C} avec l'axe des abscisses.

2. Comportement asymptotique

- (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$. Interpréter géométriquement le résultat.
- (b) Déterminer trois réels a, b, c tels que pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{3 - x}$.
- (c) Montrer que Δ est asymptote oblique à \mathcal{C} en $+\infty$ et $-\infty$.
- (d) Étudier la position relative de \mathcal{C} et de Δ .

3. Variations de f .

- (a) Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a $f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 7}{2(3 - x)^2}$
- (b) Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- (c) Sans calculs, en déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ en fonction des valeurs du réel m .
- (d) Représenter soigneusement les asymptotes de \mathcal{C} , les tangentes horizontales à \mathcal{C} , les points obtenus en 1b, 1c et 1d ainsi que \mathcal{C} . (abscisses de -4 à 10, ordonnées de -9 à 4).

EXERCICE 2. CALCUL DE LIMITES

Calculer, en justifiant avec soin, les limites suivantes :

$$(1) : \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 - 2x^3 + x + 17}{-x^2 + 2x - 1} \quad (2) : \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - \sqrt{x}) \left(5 + \frac{1}{x}\right) \quad (3) : \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + 1}{x^2 - 2x + 1}$$

$$(4) : \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} \quad (5) : \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 3)^2} \quad (6) : \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{9x^2 + 1} - 3x$$

$$(7) : \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{9x^2 + 1} - 2x$$