

**CHAPITRE 9 : PROBABILITÉS FINIES -15-02-12-**  
**Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli**

**1. VOCABULAIRE**

**Définition.** Une *expérience aléatoire* est un processus dont le résultat est incertain. On appelle *univers* d'une expérience aléatoire l'ensemble  $\Omega$  des *issues* possibles de l'expérience (ou *événements élémentaires*). Dans ce chapitre, on suppose que l'univers est un ensemble **fini**. Définir la *loi de probabilité* d'une expérience aléatoire dont l'univers est fini, c'est associer à chaque issue possible un nombre entre 0 et 1 (sa *probabilité*) qui représente les chances ou les risques que l'expérience aboutisse à ce résultat. La somme des probabilités de chacune des issues possibles doit valoir 1.

**Exemple.** Le lancer d'une pièce équilibrée est une expérience aléatoire d'univers  $\Omega = \{\text{pile, face}\}$ . La probabilité de l'évènement élémentaire « pile » est  $\mathbb{P}(\text{pile}) = 0,5$  et de même,  $\mathbb{P}(\text{face}) = 0,5$ . On a bien défini une loi de probabilité :  $\mathbb{P}(\text{pile}) + \mathbb{P}(\text{face}) = 1$ .

⚠ L'univers  $\Omega$  n'est pas un nombre, mais un ensemble : dans l'exemple précédent, l'univers  $\Omega$  est l'ensemble composé des 2 issues « pile » et « face »

**Définition.** La loi de probabilité d'une expérience aléatoire est dite *équirépartie* si chaque évènement élémentaire a la même probabilité. Si l'univers  $\Omega$  compte  $n$  issues possibles, la probabilité de chacune des issues est donc  $\frac{1}{n}$ .

**Exemple.** On considère l'expérience aléatoire consistant au lancer d'un dé équilibré. Quelle indication signifie que la loi de probabilité est équirépartie? .....  
 Lister les issues qui composent l'univers de l'expérience :  $\Omega = \dots\dots\dots$

Décrire la loi de probabilité de cette expérience :

Issue							
Probabilité							

**Évènement**

**Définition.** Étant donnée une expérience aléatoire, un *évènement*  $A$  est une partie de l'univers  $\Omega$  : il est donc composé d'un certain nombre d'issues possibles de l'expérience. La probabilité d'un évènement  $A$  est le nombre noté  $\mathbb{P}(A)$  qui est la somme des probabilités de chacune des issues qui composent l'évènement  $A$ . Ce nombre représente la chance ou le risque que l'évènement se produise.

**Exemple.** On reprend l'exemple du lancer de dé.  
 Soit  $A$  l'évènement « le résultat est strictement plus grand que 4 ». On note  $A = \{5, 6\}$  et  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(5) + \mathbb{P}(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ .  
 Soit  $B$  l'évènement « le résultat est pair ».  $B = \dots\dots\dots$   
 $\mathbb{P}(B) = \dots\dots\dots$

**Remarque.** Si la loi de probabilité est équirépartie :  $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{nombre d'issues dans } A}{\text{nombre total d'issues dans } \Omega}$

## 2. OPÉRATIONS SUR LES ÉVÈNEMENTS

On considère une expérience aléatoire d'univers fini  $\Omega$  et  $A \subset \Omega$  et  $B \subset \Omega$  deux évènements.

### Évènement certain, évènement impossible

L'évènement *certain*  $\Omega$  est composé de toutes les issues possibles : sa probabilité est  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

Il est certain que cet évènement se réalise.

L'évènement *impossible*  $\emptyset$  ne contient aucune des issues possibles : sa probabilité est  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

Il est certain que cet évènement ne se réalise pas.

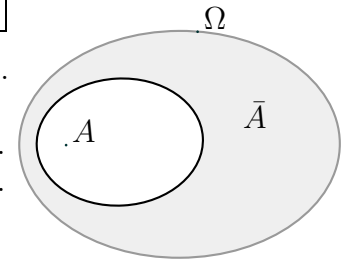
### Évènement contraire

L'évènement *contraire* de l'évènement  $A$  est l'évènement  $\bar{A}$  composé des toutes les issues de l'univers qui ne sont pas dans  $A$ . Sa probabilité est  $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

**Exemple.** On reprend l'expérience du dé,  $A = \{5, 6\}$  et  $B = \{2, 4, 6\}$ .  
Décrire  $\bar{B}$  par une liste, par une phrase, et donner sa probabilité.

.....  
.....

En général :  $\bar{\emptyset} =$  ;  $\bar{\bar{A}} =$



### Intersection d'évènements

L'*intersection* des évènements  $A$  et  $B$  est l'évènement noté  $A \cap B$ .

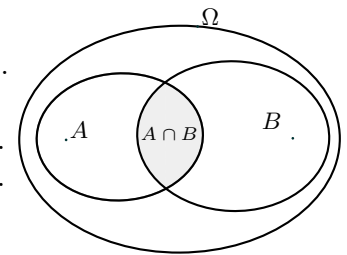
Cet évènement est réalisé lorsque  $A$  et  $B$  sont réalisés en même temps.

Lorsque  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A$  et  $B$  sont dits *incompatibles* ou *disjoints*.

**Exemple.** On reprend l'expérience du dé,  $A = \{5, 6\}$  et  $B = \{2, 4, 6\}$ .  
Décrire  $A \cap B$  par une liste, par une phrase et donner sa probabilité.

.....  
.....

En général :  $\bar{A} \cap A =$  ;  $A \cap \Omega =$  ;  $A \cap \emptyset =$



### Union d'évènements

L'*union* des évènements  $A$  et  $B$  est l'évènement noté  $A \cup B$ , il est réalisé lorsque  $A$  ou  $B$  sont réalisés. (c'est-à-dire si  $A$  est réalisé ou  $B$  est réalisé ou  $A$  et  $B$  sont réalisés en même temps).

Une *partition* de l'univers  $\Omega$  est un ensemble d'évènements deux à deux incompatibles  $A_1, \dots, A_k$  tels que  $A_1 \cup \dots \cup A_k = \Omega$ . (recouvrement sans superposition).

On a alors :  $\mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_k) = 1$ .

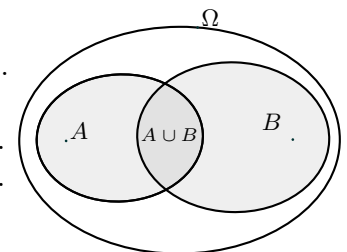
**Exemple.** On reprend l'expérience du dé,  $A = \{5, 6\}$  et  $B = \{2, 4, 6\}$ .  
Décrire  $A \cup B$  par une liste, par une phrase, et donner sa probabilité.

.....  
.....

\*  $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) =$  ;  $A \cup \bar{A} =$  ;  $\overline{A \cup B} =$

**Propriété :**  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

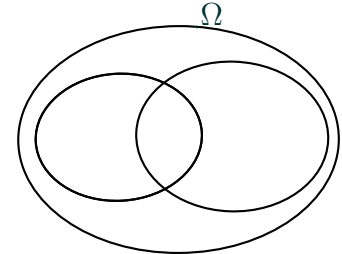
**Exemple.** Trouver et illustrer une formule semblable pour  $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$ .



### 3. UN EXEMPLE

Sur 1000 ordinateurs vendus, un marchand observe que 80 ont nécessité une réparation dans la deuxième année qui a suivi l'achat (événement noté  $R_2$ ) et 125 lors de la troisième année qui a suivi l'achat ( $R_3$ ) dont 20 avaient déjà été réparés lors de la deuxième année.

	$R_2$	$\bar{R}_2$	Total
$R_3$			
$\bar{R}_3$			
Total			1000



On considère l'expérience aléatoire « acheter un ordinateur à ce marchand » d'univers  $\Omega$  : l'ensemble des 1000 ordinateurs. Compléter :

- $R_2 \cap R_3$  « l'ordinateur à été réparé la seconde et la troisième année »  $\mathbb{P}(R_2 \cap R_3) =$
- $\bar{R}_2$  « l'ordinateur n'a subi aucune réparation »  $\mathbb{P}(\bar{R}_2) =$
- $\bar{R}_2 \cap R_3$  « l'ordinateur a subi au moins une réparation »  $\mathbb{P}(\bar{R}_2 \cap R_3) =$
- « l'ordinateur n'a subi aucune réparation »
- « l'ordinateur a subi une seule réparation »

Sachant que l'ordinateur a été réparé la seconde année, quelle est la probabilité qu'il le soit aussi la troisième? (décrire l'expérience et l'univers avant tout!) .....

Exprimer le dernier résultat à l'aide de  $\mathbb{P}(R_2)$  et  $\mathbb{P}(R_2 \cap R_3)$  : .....

### 4. ESPÉRANCE ET VARIANCE

Définir une *variable aléatoire*  $X$ , c'est associer un nombre réel à chacune des issues de  $\Omega$ . L'évènement «  $X = k$  » est l'ensemble des issues pour lesquelles  $X$  vaut  $k$ . La loi de probabilité d'une variable aléatoire  $X$  associe à chaque valeur possible  $k$  de la variable  $X$  la probabilité de l'évènement  $X = k$ . L'*espérance* de cette variable aléatoire est le nombre  $\mathbb{E}(X) = \sum k \times \mathbb{P}(X = k)$ . La *variance* de cette loi est le nombre  $\mathbb{V}(X) = \sum (k - \mathbb{E}(X))^2 \times \mathbb{P}(X = k)$ . L'*écart-type* est le nombre  $\sigma = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$ .

**Remarque.** L'espérance s'interprète comme une moyenne. Dans le cas d'un jeu, c'est un gain moyen - ou une perte moyenne, si elle est négative. Un jeu est dit équilibré lorsque l'espérance de gain est nulle. La variance et l'écart-type sont des paramètres de dispersion qui se calculent et s'interprètent comme en statistiques.

**Exemple.** Dans l'exemple précédent : la réparation d'un ordinateur la seconde année coûte en moyenne 250€ et la réparation la troisième année coûte 350€ en moyenne. On note  $X$  la variable aléatoire qui associe à chaque ordinateur le coût moyen de ses réparations éventuelles. Quelles valeurs peut prendre  $X$ ? Présenter sa loi de probabilité sous forme d'un tableau, calculer son espérance. À quel prix le marchand doit-il fixer l'extension de garantie de un à trois ans pour espérer dégager un bénéfice de 10€ par extension vendue?

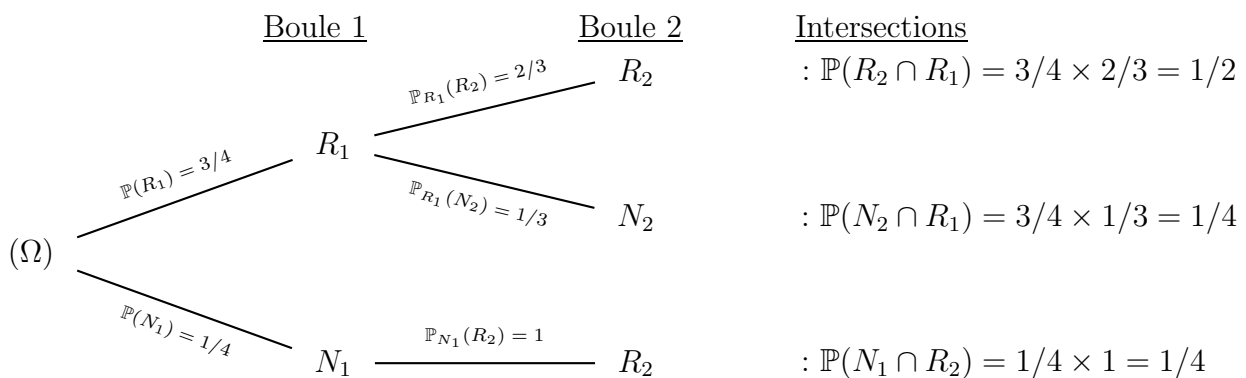
## 5. PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Si  $\mathbb{P}(A) \neq 0$ , on appelle *probabilité conditionnelle* de  $B$  sachant  $A$  le nombre noté  $\mathbb{P}_A(B)$ , ou parfois  $\mathbb{P}(B|A)$ , et défini par  $\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$   
 Ce nombre représente la probabilité de l'évènement  $A \cap B$  dans l'univers  $A$ .

**Arbre de choix.** on modélise une situation faisant intervenir les probabilités conditionnelles par un *arbre*, se lisant de gauche à droite et constitué de *nœuds* et de *branches* :

- ★ Chaque nœud représente un évènement (le premier, souvent omis, représente l'univers).
- ★ Les branches issues d'un même nœud aboutissent à des évènements formant une partition.
- ★ Près de la branche partant du premier nœud et aboutissant à  $B$  figure  $\mathbb{P}(B)$ .
- ★ Près de la branche partant de  $A$  et aboutissant à  $B$  figure la probabilité  $\mathbb{P}_A(B)$ .

**Exemple.** On tire deux boules de suite *sans remise* dans un sac contenant 4 boules indiscernables au toucher : 3 boules Rouges, et un boule Noire. On note  $R_1$  l'évènement « la première boule est rouge »,  $N_1$  l'évènement « la première boule est noire ». Les évènements  $R_1$  et  $N_1$  forment une partition. (ses deux situations ne peuvent survenir en même temps et couvrent toutes les possibilités). On définit de même  $R_2$  et  $N_2$ .



**Loi des nœuds :** La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1 : si  $B_1 \dots B_n$  est une partition et  $\mathbb{P}(A) \neq 0$  alors :  $\mathbb{P}_A(B_1) + \dots + \mathbb{P}_A(B_n) = 1$

**Preuve.** C'est une conséquence du fait que  $A \cap B_1 \dots A \cap B_n$  est une partition de  $A$ . □

**Exemple.** Dans l'exemple précédent, on vérifie :

•  $\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(N_1) = 3/4 + 1/4 = 1$     •  $\mathbb{P}_{R_1}(R_2) + \mathbb{P}_{R_1}(N_2) = 2/3 + 1/3 = 1$     •  $\mathbb{P}_{N_1}(R_2) = 1$

**Intersections et arbres :** Si un chemin parcouru sur l'arbre (de gauche à droite) passe par les évènements  $B_1 \dots B_n$ , alors  $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n)$  est le produit des probabilités associées à chacune des branches parcourues.

**Preuve.** C'est une conséquence de la définition de  $\mathbb{P}_A(B)$  :  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$ . □

**Formule des probabilités totales.** Si  $B_1, \dots, B_n$  forment une partition, la probabilité d'un évènement  $A$  est  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B_1) + \mathbb{P}(A \cap B_2) + \dots + \mathbb{P}(A \cap B_n)$ .  
 Si aucun des  $B_i$  n'est vide :  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(A) + \mathbb{P}(B_2) \times \mathbb{P}_{B_2}(A) + \dots + \mathbb{P}(B_n) \times \mathbb{P}_{B_n}(A)$

**Preuve.** cela vient aussi du fait que  $A \cap B_1 \dots A \cap B_n$  est une partition de  $A$ . □

**Exemple.** D'après la formule des probabilités totales :

$\mathbb{P}(R_2) = \mathbb{P}(R_1 \cap R_2) + \mathbb{P}(N_1 \cap R_2) = 1/2 + 1/4 = 3/4$ .

Ainsi :  $\mathbb{P}_{R_2}(R_1) = \frac{\mathbb{P}(R_1 \cap R_2)}{\mathbb{P}(R_2)} = \frac{1/2}{3/4} = 2/3$ . (on peut « retourner » l'arbre)

## 6. ÉVÈNEMENTS INDÉPENDANTS

Deux évènements  $A$  et  $B$  sont *indépendants* si et seulement si  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$

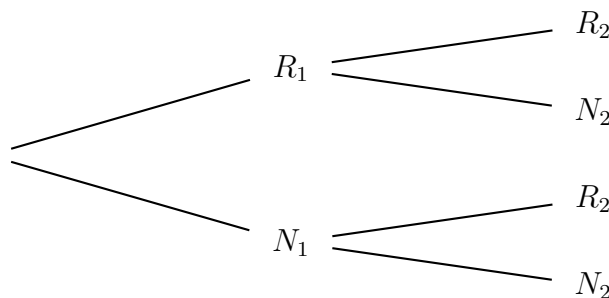
**Remarque.** Si  $A, B \neq \emptyset$  sont indépendants,  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$  donc  $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$  : le fait que  $A$  se soit réalisé n'influe pas sur la probabilité que  $B$  a de se réaliser.

⚠ Cette formule n'est utilisable que si l'on sait que  $A$  et  $B$  sont indépendants. Réciproquement, pour prouver l'indépendance de  $A$  et  $B$ , il faut calculer chacun des membres et vérifier l'égalité.

**Exemple.** Dans l'exemple précédent, dire si  $R_1$  et  $R_2$  sont indépendants :

$$\left. \begin{array}{l} \mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \dots\dots\dots \\ \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}(R_2) = \dots\dots\dots \end{array} \right\} \dots\dots\dots$$

**Exemple.** On considère l'expérience précédente, mais avec un *tirage avec remise* :



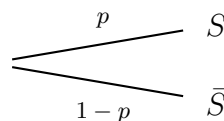
$$\begin{array}{l} \mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \dots\dots\dots \\ \mathbb{P}(N_1 \cap R_2) = \dots\dots\dots \\ \mathbb{P}(R_2) = \dots\dots\dots \end{array}$$

Refaire le calcul et dire si  $R_1$  et  $R_2$  sont indépendants :

$$\left. \begin{array}{l} \mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \dots\dots\dots \\ \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}(R_2) = \dots\dots\dots \end{array} \right\} \dots\dots\dots$$

## 7. LOI DE BERNOULLI, LOI BINOMIALE

**Définition.** Une expérience aléatoire suit une loi de *de Bernoulli* si elle n'a que deux issues possibles  $S$  (succès) et  $\bar{S}$  (échec). Il suffit alors de la donnée de  $p \in [0; 1]$  tel que  $\mathbb{P}(S) = p$  et  $\mathbb{P}(\bar{S}) = 1 - p$  pour définir la loi de probabilité de l'expérience.



**Exemple.** On considère le lancer d'un dé équilibré et on note  $S$  l'évènement : « obtenir 6 ». Donner la loi de probabilité de cette expérience :  $\mathbb{P}(S) = \dots\dots\dots$   $\mathbb{P}(\bar{S}) = \dots\dots\dots$

Une expérience suit une *loi binomiale*<sup>1</sup> si cette expérience est la répétition d'expériences indépendantes suivant une même loi de Bernoulli.  
Par exemple, du fait de l'indépendance,  $\mathbb{P}(SSSS\bar{S}) = \mathbb{P}(S)^4(1 - \mathbb{P}(S))$ .

**Exemple.** On lance trois dés. Quelle est la probabilité d'obtenir 6 trois fois ?  
Quelle est la probabilité d'obtenir 6 exactement deux fois ? au moins deux fois ? (faire un arbre)  
Quelle est la probabilité d'obtenir  $n$  fois 6 sur  $n$  lancers de dés ? Pour quel  $n$  cette probabilité est-elle inférieure à  $10^{-6}$  ?

1. on verra plus tard comment calculer systématiquement les probabilités d'évènements d'une expérience qui suit la loi binomiale.