Chapitre 8 : Fonction logarithme néperien -25-01-11-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

1. Définition et propriétés algébriques

Définition. La fonction logarithme néperien [1], notée ln est la fonction réciproque de la fonction exponentielle sur $]0;+\infty[$.
Le logarithme néperien est donc définie sur $]0;+\infty[$ et vérifie : $e^{\ln(x)} = x$ pour tout $x > 0$.

Remarque. L'existence d'une fonction réciproque est une conséquence du théorème de la bijection : exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.
Ainsi, pour tout $y > 0$, il existe un unique réel noté $x = \ln(y)$ tel que $e^x = y$.

Théorème. [ROC] Pour tous $x, y > 0$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :
$\boxed{0}$ $e^{\ln(x)} = x$; $\ln(e^a) = a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
$\boxed{1}$ $\ln(1) = 0$; $\ln(e) = 1$
$\boxed{2}$ $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
$\boxed{3}$ $\ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln(y)$
$\boxed{4}$ $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
$\boxed{5}$ $\ln(x^n) = n\ln(x)$
$\boxed{6}$ $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)$
$\boxed{7}$ ln est définie sur $]0;+\infty[$ ⚠ : $\ln(0)$, $\ln(-2)$ n'existent pas !

Preuve. Plusieurs résultats reposent sur $e^a = e^b \iff a = b$.
(0) : $e^{\ln(x)} = x$ par définition. $e^{\ln(e^a)} = e^a$ donc $\ln(e^a) = a$.
(1) : $\ln(1) = \ln(e^0) = 0$ et $\ln(e) = \ln(e^1) = 1$ d'après (0).
(2) : $e^{\ln(x)+\ln(y)} = e^{\ln(x)}e^{\ln(y)} = xy = e^{\ln(xy)}$ donc $\ln(x) + \ln(y) = \ln(xy)$.
(3) : $0 \overset{(1)}{=\!=} \ln(1) = \ln(y/y) \overset{(2)}{=\!=} \ln(y) + \ln(1/y)$ d'après (1), donc $\ln(1/y) = -\ln(y)$.
(4) : $\ln(x/y) \overset{(2)}{=\!=} \ln(x) + \ln(1/y) \overset{(3)}{=\!=} \ln(x) - \ln(y)$.
(5) : $e^{\ln(x^n)} = x^n = (e^{\ln(x)})^n = e^{n\ln(x)}$ donc $\ln(x^n) = n\ln(x)$.
(6) : $2\ln(\sqrt{x}) = \ln(\sqrt{x}^2) = \ln(x)$, on obtient l'égalité en divisant par 2. □

Exemple. $\ln\left(\frac{1}{6}\right) + \ln(3e^2) - \ln\left(\frac{e}{2}\right) =$ ....
....
....

Remarque. si $a, b > 0$, $\ln(a) < \ln(b) \iff e^{\ln(a)} < e^{\ln(b)} \iff a < b$ (car exp strictement croissante). Donc ln est strictement croissante.

Exemple. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $0.99^n < 0.5$ ....
....
....
....

1. John Neper, (1550-1617) est un mathématicien écossai à l'origine des logarithmes, en 1614. Il a introduit ce concept afin de simplifier des calculs fastidieux appliqués à l'astronomie.

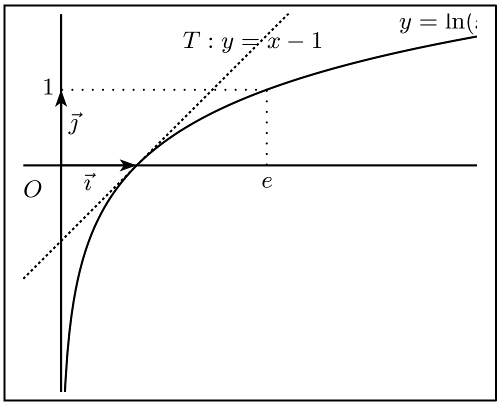
2. Étude de la fonction logarithme

Théorème. La fonction logarithme est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$:

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0 \text{ pour tout } x > 0$$

De plus : $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

x	0	$+\infty$
ln	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$



Remarque. Comme ln est strictement croissante, pour $a, b > 0$: $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$ et $\ln(a) < \ln(b) \iff a < b$.

Remarque. Si $u > 0$ et dérivable sur un interalle I, $\ln(u)$ existe et est dérivable sur I, de dérivée $\dfrac{u'}{u}$. (théorème de dérivation des fonctions composées)

Remarque. $\ln'(1) = 1$ et $\ln(1) = 0$ donc $y = x - 1$ est l'équation de la tangente à la courbe de ln en $x = 1$. Ainsi : $\ln(1+h) \approx h$ pour h voisin de 0.

Preuve. On admet la dérivabilité (et donc la continuité) de ln sur $]0;+\infty[$. Pour une preuve complète, voir la feuille d'exercice 15. La [ROC] :
on considère f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = e^{\ln(x)}$ (dérivable par composition) de dérivée vérifiant d'une part $f'(x) = \ln'(x) \times e^{\ln(x)} = x\ln'(x)$ et d'autre part $f'(x) = 1$ car $f(x) = x$. Ainsi, pour $x > 0$, $x\ln'(x) = 1$ d'où le résultat. $\square$

Exemple. Tableau de signe de $\ln(x)$? ....
....
....
Dériver $g : x \mapsto \ln(x + x^2)$ ....
....
....

Croissance comparée et limite remarquable

Théorème.[ROC] On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)^n}{x} = 0$ (croissance comparée)

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x)^n = 0$ (croissance comparée)

$\boxed{3}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$ (taux d'accroissement en 1)

Preuve. (1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} \overset{x=e^X}{=\!=} \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln(e^X)}{e^X} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X}{e^X} = 0$ par croissance comparée de la fonction exponentielle. Le même principe s'applique aux limites (1) et (2).
La troisième limite est la traduction de la dérivabilité en 1 :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

3. Logarithme et exponentielle de base a

Définition. Pour tout $b \in \mathbb{R}$ et $a > 0$, on pose $a^b = e^{b\ln(a)}$.

Remarque. si $b \in \mathbb{N}$, $e^{b\ln(a)} = e^{\ln(a^b)} = a^b$ donc la définition est compatible avec la définition usuelle des puissances, mais l'étend aux puissances réelles.
⚠ a^b, pour $b \notin \mathbb{Z}$, n'a de sens que si $a > 0$.
Pour étudier les limites, la dérivée, toute propriété de fonctions du type $x \mapsto x^\pi$, $x \mapsto 2^x$, $x \mapsto x^x$, on réécrit la fonction en utilisant la définition ci-dessus, et on utilise les propriétés du logarithme et de l'exponentielle.

Définition. La fonction exponentielle de base $a > 0$ est la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto a^x$. C'est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ de réciproque $\log_a :]0;+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$.
La fonction exponentielle de base 10 ($x \mapsto 10^x$) est très utilisée en physique, sa réciproque, le logarithme décimal, est notée log est définie par $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Remarque. $\log_a(a^x) = \dfrac{\ln(e^{x\ln(a)})}{\ln(a)} = \dfrac{x\ln(a)}{\ln(a)} = x$ ce qui prouve l'assertion sur la réciproque.
La fonction $x \mapsto a^x$ s'écrit sous la forme e^{kx} avec $k = \ln(a)$. Ses propriétés se déduisent du chapitre sur l'exponentielle (variations, limites, propriétés algébriques, équation fonctionnelle, équation différentielle satisfaite par la fonction, etc...).

Équation fonctionnelle

Théorème. Soit $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ dérivable. On a :
$f(xy) = f(x) + f(y)$ pour tous $x, y > 0 \iff f$ logarithme de base a ou la fonction nulle.

Preuve. $\Leftarrow$: vient des propriétés algébriques et de la définition du logarithme de base a.
$\Rightarrow$: soit $y > 0$ fixé. En dérivant l'égalité on obtient : $y\,f'(xy) = f'(x)$.
En évaluant en $x = 1$: $f'(y) = \dfrac{f'(1)}{y}$.
Par ailleurs, $f(1 \times 1) = f(1) + f(1)$ d'où $f(1) = 0$.
Si $f'(1) = 0$, alors $f'(x) = 0$ pour $x > 0$ donc f est constante égale à $f(1) = 0$: f nulle.
Si $f'(1) \neq 0$, il existe $a > 0$ tel que $\ln(a) = 1/f'(1)$. (d'après le théorème de la bijection : ln est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et ses limites en 0 et $+\infty$ sont $-\infty$ et $+\infty$).
Ainsi, $f'(x) - \log_a'(x) = 0$ pour tout x, donc $f(x) - \log_a(x)$ est une constante.
Comme $f(1) - \log_a(1) = 0$, la différence est nulle pour tout x : $f = \log_a$. □

Exemple. Étudier les trois fonctions suivantes : $x \mapsto x^\pi$, $x \mapsto 0,9^x$, $x \mapsto x^x$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....