CHAPITRE 7 : NOMBRES COMPLEXES -09-11-11-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

1. Définition et interprétation géométrique

Théorème. Il existe un ensemble $\mathbb{C}$ appelé ensemble des *nombres complexes* tel que :
$\star$ L'ensemble des réels est contenu dans celui des complexes : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
$\star$ $\mathbb{C}$ est muni d'une addition qui prolonge celle de $\mathbb{R}$, avec les mêmes propriétés.
$\star$ $\mathbb{C}$ est muni d'une multiplication qui prolonge celle de $\mathbb{R}$, avec les mêmes propriétés.
$\star$ $\mathbb{C}$ contient un élément noté i tel que $i^2 = -1$.
$\star$ Pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe un unique couple de réels (a, b) tel que $z = a + ib$. Le nombre réel $\Re e(z) = a$ est la *partie réelle* de z et le nombre réel $\Im m(z) = b$ est la *partie imaginaire* de z. On appelle *forme algébrique* du nombre complexe z son écriture sous la forme $a + ib$. Lorsque $\Re e(z) = 0$ on dit de z qu'il est *imaginaire pur*.

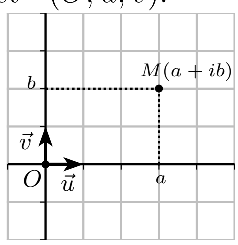
Preuve. Voir le paragraphe 7. □

Exemple. Simplifier : $(2+i)(1-i) =$ ....
$(1+i)^2 =$ .... $i^{2012} =$ ....
$(3-2i)(3+2i) =$ ....
$\Re e(i-1) =$ .... $\Im m(3-2i) =$ .... ⚠

Remarque. L'unicité de la forme algébrique signifie que $z = z'$ si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$ où $a + ib$ et $a' + ib'$ sont les formes algébriques respectives de z et z'.
Application : montrer que $(1+i)z^3 + 3z^2 + z + 2 = 0$ admet une solution imaginaire pure.
....
....
....

Complexes et géométrie affine

Dans toute la suite du cours, on munit le plan d'un repère orthonormé direct[1] $(O; \vec{u}; \vec{v})$.



$\star$ L'*affixe* du point $M(a; b)$ est le nombre complexe $z = a + ib$.
La notation $A(z_A)$ signifie que A est le point du plan d'affixe $z_A \in \mathbb{C}$.
$\star$ Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$. L'affixe du milieu M de $[AB]$ est $z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$.
$\star$ Soient p points $M_1(z_1), ..., M_p(z_p)$ et p réels $\alpha_1, ..., \alpha_p$ où $\alpha_1 + ... + \alpha_p \neq 0$.
L'affixe du barycentre G de $\{(M_1, \alpha_1), ..., (M_p, \alpha_p)\}$ est $z = \frac{\alpha_1 z_1 + ... + \alpha_p z_p}{\alpha_1 + ... + \alpha_p}$.

Exemple. Représenter les points $A(-i), B(2)$ et $D(1+i)$. Affixe de M ? ....
Déterminer les affixes des milieux I de $[AM]$ et J de $[BD]$. Conclure. ....
....
....

Rappel. Étant donnés p points $M_1, ...M_p$ et p réels tels que $\alpha_1 + ... + \alpha_p \neq 0$, il existe un unique point G, appelé barycentre de $\{(M_1, \alpha_1), ..., (M_p, \alpha_p)\}$, tel que $\alpha_1 \overrightarrow{GM_1} + ... + \alpha_p \overrightarrow{GM_p} = \overrightarrow{0}$.
Réduction : dans ce cas, pour tout point M, $\alpha_1 \overrightarrow{MM_1} + ... + \alpha_p \overrightarrow{MM_p} = (\alpha_1 + ... + \alpha_p)\overrightarrow{MG}$.
Associativité : si G' est le barycentre de $\{(M'_1, \alpha'_1), ..., (M'_p, \alpha'_q)\}$, le barycentre de $\{(\alpha_1 + ... + \alpha_p, G), (\alpha'_1, ..., \alpha'_q, G')\}$ est le barycentre de $\{(M_1, \alpha_1), ..., (M_p, \alpha_p), (M'_1, \alpha'_1), ..., (M'_q, \alpha'_q)\}$

1. tel que $(\vec{u}; \vec{v}) = +\frac{\pi}{2} \mod 2\pi$

2. Nombres Complexes et équations

Conjugué d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe sous forme algébrique. Le *conjugué* de z est $\bar{z} = a - ib$.
Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$ on a :

$\boxed{1}$ $z\bar{z} = a^2 + b^2 \in [0; +\infty[$ $\boxed{2}$ $\Re e(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ $\boxed{3}$ $\Im m(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ $\boxed{4}$ $\bar{\bar{z}} = z$

$\boxed{5}$ $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$ $\boxed{6}$ $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$ $\boxed{7}$ $\overline{z/z'} = \bar{z}/\bar{z}'$ avec $z' \neq 0$

Preuve. (1) $z\bar{z} =$ ....
(2) $\frac{1}{2}(z + \bar{z}) =$ ....
(3) $\frac{1}{2i}(z - \bar{z}) =$ ....
(4) $\bar{\bar{z}} =$ ....
(5) $\overline{z + z'} =$ ....
(6) $\overline{z \times z'} =$ ....
(7) Pour $z \neq 0$, $\bar{z} \times \overline{1/z} = \overline{z \times 1/z} = 1$ donc $\overline{1/z} = 1/\bar{z}$ d'où, avec (6), le dernier résultat. □

Méthode. Pour mettre un quotient $\frac{n}{d}$ sous forme algébrique, où $n, d \in \mathbb{C}$, (et $d \neq 0$), on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur : $\frac{n}{d} = \frac{n\bar{d}}{d\bar{d}}$

Exemple. $\dfrac{2 - i}{1 + 2i} =$ ....

Résoudre $(1 - i)z = 1 + i$ ....

Équations du second degré à coefficients réels

Soient a, b, c trois réels avec $a \neq 0$. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$. L'équation $az^2 + bz + c$ admet :
⋆ deux racines réelles si $\Delta > 0$: $z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
⋆ une racine réelle « double » si $\Delta = 0$: $z_0 = \frac{-b}{2a}$
⋆ deux racines complexes conjugées si $\Delta < 0$: $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Preuve. On met le trinôme $P(z) = az^2 + bz + c$ sous forme canonique, puis on factorise :
$P(z) = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = a\left(z^2 + 2 \times \frac{b}{2a}z + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{(2a)^2}\right)$.

⋆ si $\Delta > 0$, $P(z) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right) = a\left(z + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(z + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$.

⋆ si $\Delta = 0$: $P(z) = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2$.

⋆ si $\Delta < 0$, $P(z) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right) = a\left(z + \frac{b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z + \frac{b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$.

(pour le dernier point on note que $-\Delta > 0$ et $(i\sqrt{-\Delta})^2 = i^2(-\Delta) = \Delta$)
On conclue en appliquant la propriété du produit nul à la forme factorisée. □

Exemple. Résoudre $z^2 + z + 1 = 0$ dans $\mathbb{C}$..
....
....
....

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$. ....
....
....

3. Forme trigonométrique

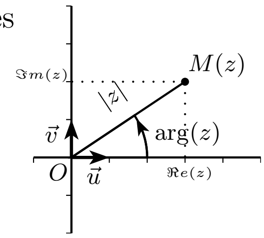
Le *module* d'un nombre complexe z est le nombre réel positif $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.
Un *argument* de z est un réel $\arg(z)$ tel que $|z|\cos(\arg(z)) = \Re e(z)$ et $|z|\sin(\arg(z)) = \Im m(z)$.
La *forme trigonométrique* de z est $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ où $r = |z|$ et $\theta = \arg(z) \mod 2\pi$.

$\boxed{1}$ Si $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ avec $r \geqslant 0$ alors $|z| = r$ et $\arg(z) = \theta \mod 2\pi$
$\boxed{2}$ $|zz'| = |z| \times |z'|$; $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \mod 2\pi$
$\boxed{3}$ $|z/z'| = |z|/|z'|$; $\arg(z/z') = \arg(z) - \arg(z') \mod 2\pi$
$\boxed{4}$ $|\bar{z}| = |z|$; $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \mod 2\pi$
$\boxed{5}$ $|-z| = |z|$; $\arg(-z) = \arg(z) + \pi \mod 2\pi$
$\boxed{6}$ Forumle de Moivre : $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$
$\boxed{7}$ $z \in \mathbb{R} \iff \arg(z) = 0 \mod \pi$ ou $z = 0$
$\boxed{8}$ z imaginaire pur $\iff \arg(z) = \frac{\pi}{2} \mod \pi$ ou $z = 0$

Interprétation géométrique

On rappelle que les coordonnées polaires $[r;\theta]$ d'un point M de coordonnées cartésiennes $(x;y)$ sont définies par

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad x = r\cos(\theta) \text{ et } y = r\sin(\theta).$$



Les coordonnées polaires d'un point M d'affixe z sont donc $[|z|;\arg(z)]$.
Preuve. (1) $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ avec $r \geqslant 0 \Rightarrow z = r\cos(\theta) + i\sin(\theta)$.
On en déduit : $|z| = \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \sqrt{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \sqrt{r^2} = r$,
d'où $\Re e(z) = |z|\cos\theta = |z|\cos(\arg z)$, $\Im m(z) = |z|\sin\theta = |z|\sin(\arg z)$.
Ainsi, $\cos(\theta) = \cos(\arg z)$ et $\sin(\theta) = \sin(\arg z)$ donc $\arg z = \theta \mod 2\pi$.
(2) On pose $r = |z|$, $r' = |z'|$, $\theta = \arg(z)$ et $\theta' = \arg(z')$ de sorte que :

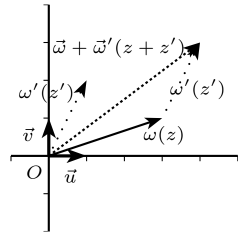
$$\begin{aligned} zz' &= r(\cos\theta + i\sin\theta)r'(\cos\theta' + i\sin\theta') \\ &= rr'([\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta')] + i[\cos(\theta)\sin(\theta') + \cos(\theta')\sin(\theta)]) \\ &= rr'(\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')) \end{aligned}$$

donc $|zz'| = rr' = |z| \times |z'|$ et $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \mod 2\pi$.
(3) $\arg(z) = \arg(z' \times z/z') = \arg(z') + \arg(z/z') \mod 2\pi$ donc $\arg(z/z') = \arg(z) - \arg(z') \mod 2\pi$. De même, $|z| = |z' \times z/z'| = |z'| \times |z/z'|$ d'où $|z/z'| = |z|/|z'|$
(7) $z \in \mathbb{R} \iff z = 0$ ou $z > 0 \;:\; z = z(\cos(0) + i\sin(0))$ ou $z < 0 \;:\; z = -z(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$.
(8) z imaginaire pur $\iff -iz \in \mathbb{R} \iff z = 0$ ou $\arg(-iz) = -\frac{\pi}{2} + \arg(z) = 0 \mod \pi$.
(4) $|\bar{z}|^2 = \bar{z}\bar{\bar{z}} = \bar{z}z = |z|^2$ et $\arg(\bar{z}) = \arg(z\bar{z}/z) = \arg(z\bar{z}) - \arg(z) = 0 - \arg(z) \mod 2\pi$.
(5) $|-z| = |-1| \times |z| = 1|z|$ et $\arg(-z) = \arg(-1) + \arg(z) = \pi + \arg(z) \mod 2\pi$.
(6) on montre par récurrence que $|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n| = 1$ et $\arg(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n) = n\theta \mod 2\pi$ grâce à (2). □

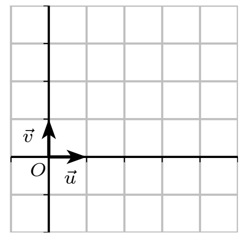
Exemple. Forme algébrique de z de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2} \mod 2\pi$: $z = \dots\dots\dots\dots$
Forme trigo de -1 : $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
Forme trigo de $z = \sqrt{3} + i$. $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
Forme algébrique de z^{25}. $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
On considère le triangle dont les sommets A, B, C ont pour affixe les solutions de $z^3 = 1$. Calculer OA,OB,OC. Centre du cercle circonscrit, centre de gravité, nature de ABC ? $\dots\dots$
$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

4. Version complexe des formules de géométrie cartésienne

Complexes et géometrie vectorielle



L'affixe du vecteur $\vec{\omega}$ de coordonnées $(x;y)$ est $z = x + iy$. On note $\vec{\omega}(z)$.
⋆ $\vec{\omega}(z)$ vérifie $||\vec{\omega}|| = |z|$ et $(\vec{u};\vec{\omega}) = \arg(z) \mod 2\pi$.
⋆ Soient $\vec{\omega}(z)$ et $\vec{\omega}'(z')$. Le vecteur $\omega + \omega'$ a pour affixe $z + z'$.
⋆ Soient $\vec{\omega}(z)$ et $\vec{\omega}'(z')$. On a $(\vec{\omega};\vec{\omega}') = \arg(z'/z) \mod 2\pi$.
⋆ Soient deux points $A(z_A)$ et $B(z_B)$. L'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$.



Exemple. Soient $A(-i)$, $B(3)$, $C(2+3i)$ et $D(-1+2i)$. Affixes de $\overrightarrow{AB}(z)$, $\overrightarrow{AD}(z')$ et $\overrightarrow{DC}(z'')$? Mettre z/z' sous forme trigo. Nature de $ABDC$?
....
....
....
....
....

Module et distance

⋆ Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$. Alors $AB = |z_B - z_A| = ||\overrightarrow{AB}||$.
⋆ inégalité triangulaire : $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$ (voir première figure).

Remarque. Soient $r > 0$ (réel) et le point $A(z_A)$. L'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z - z_A| = r$ est le cercle de centre A et de rayon r (d'après le premier point).

Argument et angles

Soient quatre points du plan $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$ avec $A \neq B$.
⋆ $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) \mod 2\pi$.
⋆ (AB) et (CD) parallèles $\Longleftrightarrow$ $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$ (donc A, B et C alignés $\Longleftrightarrow$ $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$)
⋆ (AB) et (CD) perpendiculaires $\Longleftrightarrow$ $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ imaginaire pur.

Preuve. Les égalités suivantes sont valables $\mod 2\pi$:

$$
\begin{aligned}
\arg\left(\tfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) &= \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A) && \text{propriété (6) du paragraphe 3.}\\
&= (\overrightarrow{u};\overrightarrow{CD}) - (\overrightarrow{u};\overrightarrow{AB}) && z_D - z_C \text{ est l'affixe de } \overrightarrow{CD},\ z_B - z_A \text{ celle de } \overrightarrow{AB}\\
&= (\overrightarrow{u};\overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{u}) = (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{u}) + (\overrightarrow{u};\overrightarrow{CD})\\
&= (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) \mod 2\pi && \text{relation de Chasles pour les angles orientés}
\end{aligned}
$$

Cette propriété et les propriétés (2) et (3) du paragraphe 3. impliquent les deux suivantes. □

Exemple. Soient $E(-1 + i\sqrt{3})$, $F(-1 - i\sqrt{3})$ et $G(2)$. Mettre $z = \frac{z_F - z_G}{z_E - z_G}$ sous forme trigo. Nature de EFG ? ....
....
....
....

Exemple. Soit z de forme trigonométrique $z = re^{i\theta}$. Quelle est la forme trigonométrique de $z' = iz$. Interpréter géométriquement la multiplication par i...................................
....
....

5. Forme exponentielle

Notation. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ \theta \mapsto \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (au sens ou $\Re e(f)$ et $\Im m(f)$ sont dérivables) de dérivée vérifiant pour $\theta \in \mathbb{R}$: $f'(\theta) = -\sin(\theta) + i\cos(\theta) = if(\theta)$ et $f(0) = 1$. Or pour $a \in \mathbb{R}$, l'unique solution de $y' = ay$ vérifiant $y(0) = 1$ est $t \mapsto e^{at}$. Par analogie, on note :

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)} \qquad \text{pour tout } \theta \in \mathbb{R}$$

$|e^{i\theta}| =$ ....

Propriété. La *forme exponentielle* de $z \in \mathbb{C}$ est $z = re^{i\theta}$ où $r = |z|$ et $\theta = \arg(z) \mod 2\pi$.

$\boxed{1}$ Si $z = re^{i\theta}$ avec $r \geqslant 0$ alors $|z| = r$ et $\arg(z) = \theta \mod 2\pi$
$\boxed{2}$ $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ $\boxed{3}$ $e^{i\theta}/e^{i\theta'} = e^{i(\theta-\theta')}$ $\boxed{4}$ $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ $\boxed{5}$ $e^{i\pi} + 1 = 0;\ -e^{i\theta} = e^{i\theta+\pi}$
$\boxed{6}$ formule de Moivre : $(e^{i\theta})^n = e^{ni\theta}$
$\boxed{7}$ formule d'Euler : $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Preuve. Les points (1) à (6) sont des reformulations des points (1) à (6) du paragraphe 3.
(7) $\dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + \overline{e^{i\theta}}) = \Re e(e^{i\theta}) = \cos(\theta)$. De même, $\sin(\theta) = \Im m(e^{i\theta})$. □

Exemple. Soient $z = 1 + i$, $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $Z = z'/z$. Déterminer la forme algébrique et la forme exponentielle de Z, en déduire $\cos\frac{\pi}{12}$. ....
....
....
....
....
....
....
....
....

Exemple. Linéariser $\sin^3(x)$ ....
....
....
....
....

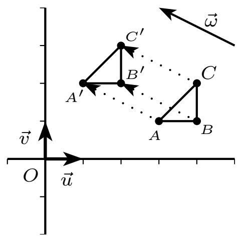
Propriété. Représentation paramétrique d'un cercle : le cercle de centre $\Omega(z_\Omega)$ et de rayon $r > 0$ est l'ensemble des $M(z)$ tels que $z = z_\Omega + re^{i\theta}$ où θ parcourt $\mathbb{R}$.

Preuve. $M(z)$ appartient au cercle de centre Ω et de rayon r si et seulement si $\Omega M = |z - z_\Omega| = r$ ce qui équivaut à $z - z_\Omega = re^{i\theta}$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$. (forme exponentielle de $z - z_\Omega$). □

Exemple. Soit $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1}{z}$. Déterminer l'ensemble des $M'(z' = f(z))$ où $M(z)$ parcourt le cercle de centre $A(1)$ et de rayon 1. ....
....
....
....
....

6. Nombres complexes et transformations

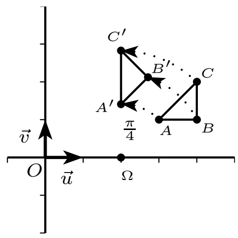
Translations



Soit $\vec{\omega}(z_\omega)$ un vecteur. Le point $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par la translation de vecteur $\vec{\omega}$ si et seulement si $z' = z + z_\omega$.

Soient A, B, C d'images A', B', C' par une translation de vecteur $\vec{\omega}$.
$\star$ La translation conserve les distances : $A'B' = AB$.
$\star$ La translation conserve les angles : $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B'}; \overrightarrow{A'C'}) \mod 2\pi$.
$\star$ Si $\vec{\omega} \neq \vec{0}$, la translation n'a pas de point fixe.

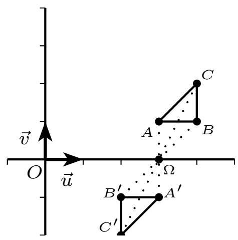
Rotations



Soit $\Omega(z_\Omega)$ un point et $\theta \in \mathbb{R}$. Le point $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par la rotation d'angle θ et de centre Ω si et seulement si $z' - z_\Omega = e^{i\theta}(z - z_\Omega)$.

Soient A, B, C d'images A', B', C' par la rotation de centre Ω et d'angle θ.
$\star$ La rotation conserve les distances : $A'B' = AB$.
$\star$ La rotation conserve les angles : $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B'}; \overrightarrow{A'C'}) \mod 2\pi$.
$\star$ Si $\theta \neq 0 \mod 2\pi$, le centre Ω est l'unique point fixe de la rotation.

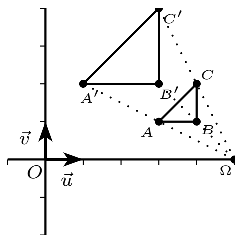
Symétrie centrale



Soit $\Omega(z_\Omega)$ un point. Le point $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par la symétrie de centre Ω si et seulement si $z' - z_\Omega = -(z - z_\Omega)$.

La symétrie de centre Ω est la rotation de centre Ω et d'angle π ($-1 = e^{i\pi}$), elle a donc les mêmes propriétés que les rotations.

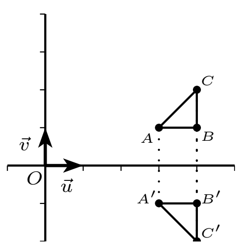
Homothéties



Soit $\Omega(z_\Omega)$ un point et $r \in \mathbb{R}^*$. Le point $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par l'homothétie de centre Ω et de rapport $r \iff z' - z_\Omega = r(z - z_\Omega)$.

Soient A, B, C d'images A', B', C' par l'homothétie centre Ω et rapport r.
$\star$ L'homothétie multiplie les distances par $|r|$: $A'B' = r\ AB$.
$\star$ L'homothétie conserve les angles : $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B'}; \overrightarrow{A'C'}) \mod 2\pi$.
$\star$ si $r \neq 1$, le centre Ω est l'unique point fixe de l'homothétie.

Symétrie d'axe (Ox)



Le point $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par la symétrie d'axe (Ox) si et seulement si $z' = \bar{z}$.

Soient A, B, C d'images A', B', C' par une symétrie d'axe Δ.
$\star$ La symétrie axiale conserve les distances : $A'B' = AB$.
$\star$ La symétrie axiale renverse les angles : $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = -(\overrightarrow{A'B'}; \overrightarrow{A'C'}) \mod 2\pi$.
$\star$ L'ensemble des points fixes de la symétrie axiale est son axe Δ.

Exemple. Soient $A(1)$ déterminer l'affixe de D pour que ADO soit un triangle équilatéral direct, déterminer l'affixe de C pour que $ABCD$ soit un parallélogramme. Nature précise de $ABCD$? ....

....

Quel est la nature de la composée de l'homothétie de centre $\Omega(z_\Omega)$ et de rapport r avec l'homothétie de centre $\Omega'(z'_\Omega)$ et de rapport r' ?

7. Complément : construction de $\mathbb{C}$

$\boxed{1}$ On définit $\mathbb{C}$ comme l'ensemble des couples $(a;b)$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

$\boxed{2}$ L'injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui a $x \in \mathbb{R}$ associe $(x;0) \in \mathbb{C}$ permet de considérer que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

$\boxed{3}$ On munit $\mathbb{C}$ des opérations $\oplus$ et $\otimes$ suivantes : pour tous $(a;b)$ et $(a';b')$ dans $\mathbb{C}$,

$$(a;b) \oplus (a';b') = (a+a' \ ; \ b+b') \qquad (a;b) \otimes (a';b') = (aa' - bb' \ ; \ ab' + a'b)$$

On remarque que ces opérations coïncident avec celles des réelles lorsque $b = b' = 0$:

$$(a;0) \oplus (a';0) = (a+a' \ ; \ 0) \qquad (a;b) \otimes (a';b') = (aa' \ ; \ 0)$$

$\boxed{4}$ Muni de l'addition, $(\mathbb{C}, \oplus)$ a, comme $(\mathbb{R}, +)$, une structure de *groupe commutatif* :

- $\star$ $\oplus$ est commutative : $(a;b) \oplus (a';b') = (a';b') \oplus (a;b)$
- $\star$ $\oplus$ est associative : $[(a;b) \oplus (a';b')] \oplus (a";b") = (a;b) \oplus [(a';b') \oplus (a";b")]$
- $\star$ $(0;0)$ est un élément neutre pour $\oplus$: $(a;b) \oplus (0;0) = (a;b)$.
- $\star$ pour tout $(a;b) \in \mathbb{C}$, il existe $(a';b')$ ($a' = -a$ et $b' = -b$) tel que $(a;b) \oplus (a';b') = (0;0)$.

Preuve. La preuve repose sur les propriétés analogues des réels. Pour la commutativité :

$$\begin{array}{rcll} (a;b) \oplus (a';b') & = & (a+a';b+b') & \text{par définition de } \oplus \\ & = & (a'+a;b'+b) & \text{par commutativité de } (\mathbb{R},+) \\ & = & (a';b') \oplus (a;b) & \text{par définition de } \oplus \end{array}$$

$\square$

$\boxed{5}$ On note $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{(0;0)\}$ et $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$. Muni de la multiplication, $(C^*;\otimes)$ est un groupe commutatif :

- $\star$ $\otimes$ est commutative : $(a;b) \otimes (a';b') = (a';b') \otimes (a;b)$
- $\star$ $\otimes$ est associative : $[(a;b) \otimes (a';b')] \otimes (a";b") = (a;b) \otimes [(a';b') \otimes (a";b")]$
- $\star$ $(1;0)$ est un élément neutre pour $\oplus$: $(a;b) \otimes (1;0) = (a;b)$.
- $\star$ pour tout $(a;b) \in \mathbb{C}$, il existe $(a';b')$ ($a' = \frac{a}{a^2+b^2}$ et $b' = \frac{-b}{a^2+b^2}$) tel que $(a;b) \otimes (a';b') = (1;0)$.

Preuve. La preuve repose sur les propriétés de l'addition et de la multiplication des réels. (mais c'est plus fastidieux que pour $\oplus$). $\square$

$\boxed{6}$ Enfin, $\otimes$ est distributive par rapport à $\oplus$ (on dit que $(\mathbb{C};\oplus;\otimes)$ est un *corps commutatif*) :

$$[(a;b) \oplus (a';b')] \otimes (a'';b'') = [(a;b) \otimes (a'';b'')] \oplus [(a';b') \otimes (a'';b'')]$$

$\boxed{7}$ Du fait que $\mathbb{R}$ se plonge dans $\mathbb{C}$, on notera simplement $a = (a;0)$.
Le fait que les opérations sur $\mathbb{C}$ prolongent celles de $\mathbb{R}$ avec les mêmes propriétés nous incite à noter $\oplus = +$ et $\otimes = \times$.
En notant $i = (0;1)$ on observe :

- $\star$ $(a;b) = (a;0) + (0;b) = a + b \times (0;1) = a + ib$.
- $\star$ $i^2 = (0;1) \times (0;1) = (0 \times 0 - 1 \times 1; 0 \times 1 + 1 \times 0) = -1$.

Cela justifie le premier théorème.