Chapitre 5 : Fonction exponentielle -09-11-11-
Terminale S 2, 2011-2012, Y. Angeli

1. Définition et premières propriétés

Théorème. Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant $f' = f$ et $f(0) = 1$. Cette fonction est la *fonction exponentielle*, notée exp. (plus tard, on notera $\exp(x) = e^x$.)

Remarque. On a donc $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$.
L'existence est admise. (on a tracé la courbe de la fonction exponentielle par la méthode d'Euler dans le DM 8). Pour démontrer le théorème on s'appuie sur :

Lemme 1.[ROC] Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I alors $\exp(u)$ est dérivable sur I de dérivée $\exp(u)' = u' \exp(u)$

Preuve. (du lemme 1) $\exp(u)$ est une fonction comopsée de la forme $v \circ u$ avec $v = \exp$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et u dérivable sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Par le théorème de dérivation des fonctions composées, $\exp(u)$ est dérivable sur I de dérivée : $\exp(u)' = u' \times v' \circ u = u' \times \exp(u)$. $\square$.

Lemme 2.[ROC] pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x)\exp(-x) = 1$ donc $\exp(x) \neq 0$.

Preuve. (du lemme 2) Considérons la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \exp(x)\exp(-x)$.
Comme composée des fonctions exp et $x \mapsto -x$ dérivables sur $\mathbb{R}$, $v : x \mapsto \exp(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $v'(x) = -1 \times \exp'(-x) = -\exp(-x)$.
Comme produit de exp et v dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $h'(x) = \exp'(x)v(x) + v'(x)\exp(x) = \exp(x)\exp(-x) - \exp(-x)\exp(x) = 0$, donc h est constante égale à $h(0) = \exp(0)\exp(-0) = 1$. D'où $h(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
En conclusion, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x)\exp(-x) = 1$ donc $\exp(x) \neq 0$. $\square$

Preuve. (de l'unicité) On suppose qu'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifie également $f' = f$ et $f(0) = 1$. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{\exp(x)}$. La fonction g est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, puisque exp ne s'annule pas.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \dfrac{f'(x)\exp(x) - \exp'(x)f(x)}{\exp(x)^2} = \dfrac{f(x)\exp(x) - \exp(x)f(x)}{\exp(x)^2} = 0$ donc g est constante égale à $g(0) = \dfrac{f(0)}{\exp(0)} = 1$. D'où pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(x)$.
Ainsi, exp est la seule fonction à satisfaire $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$. $\square$

Définition. On définit le nombre e par $e = \exp(1) \approx 2,718$ (voir DM 8).

Exemple. On note ch (cosinus hyperbolique) et sh (sinus hyperbolique) les fonction définies sur les réels par $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$ et $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}$. Calculer ch' et sh'.

2. Propriétés algébriques

Théorème.[ROC] Pour tous x, y réels, $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$

Preuve. on fixe $y \in \mathbb{R}$ et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(y)}$.

On remarque que $f(0) = \dfrac{\exp(0+y)}{\exp(y)} = 1$ et que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour $x \in \mathbb{R}$,

$f'(x) = \dfrac{1}{\exp(y)} \times 1 \times \exp(x+y) = f(x)$. Par unicité : $f(x) = \exp(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(y)}$. $\square$

Propriété. [ROC] Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $\exp(nx) = \exp(x)^n$

Preuve. montrons le résultat pour $n \in \mathbb{N}$ par récurrence : soit $\mathcal{P}(n)$: $\exp(nx) = \exp(x)^n$

$\star$ initialisation : $\exp(0) = 1 = \exp(x)^0$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

$\star$ transmission : on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie : $\exp(nx) = \exp(x)^n$. On a :

$\exp(x)^{n+1} = \exp(x)^n \exp(x) \overset{\mathcal{P}(n)}{=\!=} \exp(nx)\exp(x) \overset{thm}{=\!=} \exp((n+1)x)$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$\star$ En conclusion, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$.

On l'étend à $n \in \mathbb{Z}$ en remarquant que $\exp(-nx) = \dfrac{1}{\exp(nx)} = \dfrac{1}{\exp(x)^n} = \exp(x)^{-n}$. $\square$

Remarque. On a donc $e^n = \exp(1)^n = \exp(n)$. Par analogie, on note $\exp(x) = e^x$ pour tout réel x, notation cohérente du fait que la fonction exponentielle possède les mêmes propriétés algébriques (transformation de la somme en produit) que les puissances.

Propriété. [ROC] Pour tous x, y réels et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$\boxed{1}$ $\exp(0) = 1$	$\boxed{1}$ $\mathrm{e}^0 = 1$
$\boxed{2}$ $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$	$\boxed{2}$ $\mathrm{e}^{x+y} = e^x \times e^y$
$\boxed{3}$ $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$	$\boxed{3}$ $\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{e^x}$
$\boxed{4}$ $\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$	$\boxed{4}$ $\mathrm{e}^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
$\boxed{5}$ $\exp(nx) = \exp(x)^n$	$\boxed{5}$ $\mathrm{e}^{nx} = (e^x)^n$
$\boxed{6}$ $\exp\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\exp(x)}$	$\boxed{6}$ $\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = \sqrt{e^x}$
$\boxed{7}$ $\exp(x) > 0$	$\boxed{7}$ $\mathrm{e}^x > 0$

Preuve. La propriété (1) vient de la définition. La propriété (3) est le lemme 2 du pragraphe 1, les propriétés (2) et (5) sont prouvées ci-dessus.

Pour la propriété (4), on a : $\exp(x-y) \overset{(2)}{=\!=} \exp(x)\exp(-y) \overset{(3)}{=\!=} \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

Pour les propriété (6) et (7), on remarque que $\exp\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \exp x$. Comme un carré est positif et $\exp(x) \neq 0$, $\exp(x) > 0$. Ainsi, $\exp(x/2)$ est positif, c'est donc la racine carrée de $\exp(x)$. $\square$

Équation fonctionnelle

Théorème.[ROC] La fonction exponentielle est l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(0) = 1$ et $f(x)f(y) = f(x+y)$ pour tous réels x, y.

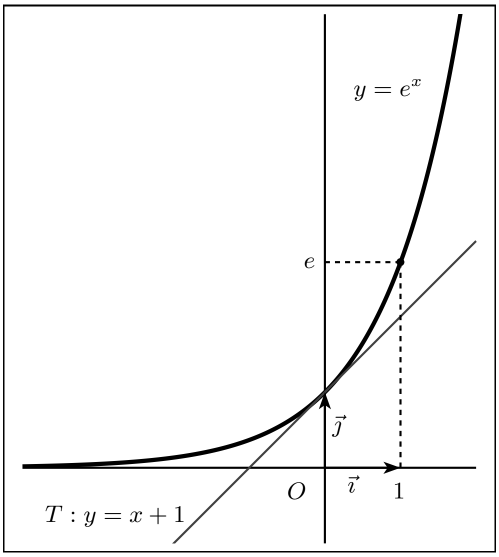
Preuve. La fonction exponentielle vérifie l'équation fonctionnelle d'après la propriété (2), et $\exp'(0) = \exp(0) = 1$.

On fixe $y \in \mathbb{R}$. Si f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifie $f(x)f(y) = f(x+y)$, en dérivant par rapport à x on trouve : $f'(x)f(y) = f'(x+y)$. En choisissant $x = 0$, il vient $f'(0)f(y) = f'(y) \iff f(y) = f'(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Or $f(0) = f'(0) = 1$: par unicité de la fonction exponentielle, $f = \exp$. $\square$.

3. Étude de la fonction exponentielle

Théorème. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\exp'(x) = \exp(x) > 0$ pour tout x réel.
En outre : $e^0 = 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

x	$-\infty$		$+\infty$
exp			$+\infty$
		$\nearrow$	
	0		



Remarque. La tangente T au point d'abscisse 0 à la courbe $\mathcal{C}_{\exp}$ a pour équation $y = x + 1$, elle est située sous la courbe sauf au point de contact $(0; 1)$.

Remarque. En conséquence, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:
$e^a = e^b \iff a = b$ et $e^a < e^b \iff a < b$

Preuve. Par définition, la fonction exponentielle est dérivable de dérivée $\exp' = \exp$ et vérifie $\exp(0) = 1$. D'après la propriété (7) on a $\exp(x) > 0$ pour tout x, la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
La tangente à la courbe au point d'abscisse 0 a pour équation $y = \exp'(0)(x - 0) + \exp(0)$ donc $y = x + 1$. Étudions la foncton f définie par $f(x) = \exp(x) - (x + 1)$. Cette fonction est dérivable de dérivée $f'(x) = \exp(x) - 1 = \exp(x) - \exp(0)$ pour tout réel x. Comme la fonction exponentielle est strictement croissante, $f'(x) > 0 \iff x > 0$ et $f'(x) < 0 \iff x < 0$ donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$		$\nearrow$	
			0		

Ainsi, $\exp(x) - (x + 1) > 0$ pour $x \neq 0$. On a donc la position relative annoncée.

On a également : $\exp(x) \geqslant x + 1$ pour tout x réel. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} x + 1 = +\infty$, donc par le théorème de minoration $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$. Enfin, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{X \to +\infty} e^{-X} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{1}{e^X} = 0$. $\square$

Croisssance comparée et limite remarquable

Théorème.[ROC] On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} e^x = +\infty$ (croissance comparée)

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$ (croissance comparée)

$\boxed{3}$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ (taux d'accroissement en 0)

Preuve. Comme $\exp'(0) = 1$, la limite du taux d'accroissement de l'exponentielle en 0 est 1.
Pour la première limite, on rappelle que $e^x \geqslant x + 1 > x$ donc pour $x > 0$, $\frac{e^x}{x} > 1$ et on écrit :
$x^n e^x = \dfrac{1}{(1+n)^n} \left(\dfrac{n+1}{x} e^{\frac{x}{n+1}} \right)^n e^{\frac{x}{n+1}} \geqslant \dfrac{1}{(1+n)^n} 1^n e^{\frac{x}{n+1}}$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{n+1} = +\infty$, donc par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{x}{n+1}} = +\infty$ et par le théorème de minoration, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} e^x = +\infty$.
Pour la dernière on remarque que $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = \lim\limits_{X \to +\infty} (-1)^n \dfrac{1}{\frac{1}{X^n} e^X} = 0$ par quotient. $\square$.

4. Équation différentielles

Une *équation différentielle* est une équation liant la variable x, une fonction inconnue y et ses dérivées successives $y', y'', ..., y^{(n)}$ sur un intervalle donnée.

Exemple. Résoudre l'équation différentielle (sur $\mathbb{R}$) : $y' = 0$ ....
....
Résoudre l'équation différentielle (sur $\mathbb{R}$) : $y'' = 0$ ....
....
Résoudre l'équation différentielle (sur $\mathbb{R}$) : $y' = y$ et $y(0) = 1$. ....
....
Résoudre l'équation différentielle (sur $\mathbb{R}$) : $y' = 2x$ et $y(0) = 1$. ....
....

Exemple. Montrer que $x \mapsto \sin(\omega t)$ et $x \mapsto \cos(\omega t)$ sont des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$. ....
....
....
....
....
....

5. Équations différentielles d'ordre 1

Théorème. [ROC] L'ensemble des solutions dérivables sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' = ay$ (où $a \in \mathbb{R}$) est l'ensemble des fonctions de la forme $y(x) = Ce^{ax}$ où $C \in \mathbb{R}$.

Preuve. La fonction définie par $y(x) = Ce^{ax}$ est solution de l'équation différentielle : elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $y'(x) = a \times \ Ce^{ax} = ay(x)$. (composée avec un exponentielle).
Réciproquement, si y est solution, la fonction f définie par $f(x) = e^{-ax}y(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -ae^{-ax}y(x) + e^{-ax}y'(x) = -ae^{-ax}y(x) + e^{-ax} \times ay(x) = 0$ donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = C = e^{-ax}y(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'où finalement $y(x) = Ce^{ax}$. $\square$.

Théorème. [ROC] L'ensemble des solutions dérivables sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' = ay + b$ (où $a \in \mathbb{R}$) est l'ensemble des fonctions de la forme $y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ où $C \in \mathbb{R}$.

Preuve. On remarque que f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{b}{a}$ est solution de l'équation différentielle : $f'(x) = 0$ et $af(x) + b = -b + b = 0$.
On remarque ensuite que y est solution si et seulement si $(y-f)' = y' - f' = ay + b - (af + b) = a(y - f)$ c'est-à-dire si et seulement si $y - f$ est solution d'une équation homogène du type considéré dans le théorème précédent. D'où $y(x) - f(x) = Ce^{ax}$ soit $y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et un $C \in \mathbb{R}$. $\square$.